ANNALI

DEL

R. ISTITUTO TECNICO

ANTONIO ZANON

IN

UDINE

SERIE II — ANNO XXV
1905-1906

UDINE
TIPOGRAFIA DOMENICO DEL BIANCO
1910

ANNALI

DEL

R. ISTITUTO TECNICO

ANTONIO ZANON

IN

UDINE

SERIE II — ANNO XXV

1905-1906

UDINE

TIPOGRAFIA DOMENICO DEL BIANCO

1910

INDICE

COMPUTI

DELLE

ASSICURAZIONI SULLA VITA

CAPO I.

Assicurazioni sulla vita.

L'assicurazione sulla vita, è un contratto per il quale uno dei contraenti si obbliga di pagare, mediante un compenso convenuto, all'altro contraente o ad altre persone da lui designate, una somma pattuita di denaro, quando un determinato fatto di vita o di morte verrà ad accadere.

Chiamasi: *assicuratore*, colui che s'impegna a pagare la somma convenuta, quando si verifichi l'eventualità determinata; *assicurato*, la persona nella quale deve verificarsi l'eventualità stessa; *contraente* (che di solito è lo stesso assicurato), chi s'impegna verso l'assicuratore al pagamento del compenso convenuto; *beneficiario* (che può essere anche l'assicurato), colui al quale, verificandosi l'aventualità, l'assicuratore deve pagare la somma assicurata; *premio*, il compenso che dev'essere pagato all'assicuratore; *polizza d'assicurazione*, lo scritto che comprova il contratto di assicurazione.

Le assicurazioni sulla vita si distinguono in tre grandi classi, cioè: *assicurazioni in caso di vita*, le quali hanno effetto quando l'assicurato raggiunge una certa età; *assicurazioni in caso di morte*, le quali hanno effetto colla morte dell'assicurato; *assicurazioni miste*, le quali comprendono entrambi i casi suindicati, ossia nelle quali la somma che forma oggetto del contratto è pagabile allo stesso assicurato, se questi arriva ad una certa età, o ad un determinato beneficiario, in caso di premorienza dell'assicurato.

Nelle *assicurazioni in caso di vita*, l'assicurato (che di solito è anche beneficiario) paga un premio unico o dei premi annui e l'assicuratore si obbliga di corrispondergli, allorchè egli raggiunga una certa età, o un dato capitale o una determinata rendita vitalizia.

Queste assicurazioni possono essere:

a) di capitale differito a premio unico, o *a premi annui*, quando l'assicuratore si obbliga di pagare all'assicurato un dato capitale dopo un certo numero d'anni, se l'assicurato sarà ancora in vita;

b) di rendite vitalizie immediate (contratto di vitalizio), quando l'assicurato cede un capitale all'assicuratore, il quale si obbliga di corrispondergli subito una data rendita annua per tutta la durata della sua vita;

c) di rendite vitalizie differite a premio unico, o *a premi annui* (pensioni), quando l'assicurato ha diritto a questa rendita dopo un certo numero di anni, se si troverà ancora in vita, verso il pagamento di un premio unico o di premi annui, i quali naturalmente cesseranno nel momento in cui l'assicurato comincierà il godimento della rendita;

d) di rendite vitalizie temporanee, quando l'assicurato ha diritto alla rendita soltanto per un tempo limitato.

Nelle *assicurazioni in caso di morte*, l'assicurato (che necessariamente è persona diversa dal beneficiario) paga un premio unico o dei premi annui e l'assicuratore si obbliga di pagare alla morte dell'assicurato un determinato capitale o un'annua rendita ai suoi eredi o ad altra persona da lui designata (beneficiario).

Queste assicurazioni possono essere:

a) sulla vita intera a premio unico, o *a premi annui vitalizi*, o *a premi annui temporanei*, quando l'assicurato si obbliga di pagare il premio in una somma unica, o in rate annue per tutta la vita di lui, o solo per un determinato numero d'anni, e l'assicuratore si obbliga di corrispondere il capitale o la rendita agli eredi dell'assicurato dopo la di lui morte, in qualunque tempo avvenga;

b) temporanee a premio unico, o *a premi annui*, quando l'assicuratore assume l'obbligo di pagare il capitale o la rendita soltanto nel caso che la morte dell'assicurato avvenga entro un dato numero d'anni previamente stabilito, dopo i quali, se l'assicurato è ancora in vita, i premi pagati restano a beneficio dell'assicuratore;

c) differite a premio unico, o *a premi annui*, quando l'assicuratore paga il capitale o la rendita solo nel caso che la morte dell'assicurato accada dopo un'epoca prestabilita, ma se avviene prima, non paga nulla;

d) a termine fisso a premio unico, o *a premi annui* (assicurazione dotale), quando l'assicuratore si obbliga di pagare all'assicurato un dato capitale ad un'epoca determinata, se sarà ancora in vita, oppure ai suoi eredi od altra persona designata, se invece sarà morto;

e) di sopravvivenza a premio unico, o *a premi annui*, quando l'assicuratore assume l'obbligo di pagare il capitale o la rendita nel solo caso che alla morte dell'assicurato sia superstite un'altra persona determinata;

f) a vite riunite, o *sopra due teste*, *a premio unico*, *od a premi annui*, quando, essendovi due persone assicurate, vi è l'obbligo di pagare il capitale o la rendita alla superstite.

Nelle *assicurazioni miste*, l'assicurato paga un premio unico o dei premi annuali (fissi o variabili) e l'assicuratore si obbliga di corrispondere un dato capitale o una data rendita allo stesso assicurato nel caso che raggiunga una determinata età, od ai suoi eredi in caso della sua morte.

Anche queste assicurazioni offrono varie combinazioni.

Si può stabilire che alla morte dell'assicurato cessi l'obbligo del pagamento dei premi, ma che il capitale non venga corrisposto se non alla scadenza del contratto, ed allora si ha *l'assicurazione mista a termine fisso* (assicurazione dotale).

Si può pure stabilire che se l'assicurato raggiunge una certa età, oltre al capitale abbia diritto di ricevere una seconda polizza esente da ogni premio per un pari capitale pagabile ai suoi eredi all'epoca della sua morte, ed in tal caso si ha *l'assicurazione mista a capitale raddoppiato.*

In ogni categoria di assicurazioni sulla vita può pattuirsi o meno che l'assicurato partecipi agli utili che l'assicuratore venisse a realizzare, e perciò ogni contratto può essere alla sua volta di due specie, cioè *con partecipazione agli utili*, o *senza partecipazione agli utili*.

Abbiamo detto che il compenso dovuto all'assicuratore per ottenere il beneficio dell'assicurazione, chiamasi *premio*.

Nel premio si distinguono praticamente due parti: il *premio puro o normale*, ch'è il costo dell'assicurazione calcolato in base alla tassa d'interesse cui si presume impiegare il danaro ed alla probabilità dell'evento cui l'assicurazione si riferisce; il *premio di caricamento*, ch'è un aumento fatto al premio puro per sopperire alle spese inerenti alla gestione dell'azienda assicuratrice e per costituire un compenso a chi la esercita [1]. Il premio puro aumentato del caricamento costituisce il *premio di tariffa*, ed è quello corrisposto dall'assicurato.

I premi puri sono calcolati in base alle *tavole di sopravvivenza*, dalle quali si hanno i dati forniti dalla statistica relativi alla durata e agli eventi della vita degli individui.

---

[1] In via ordinaria viene aggiunto il 4 ‰ del capitale e il 20 % del premio puro.

CAPO II.

Tavole di sopravvivenza.

Le *tavole di sopravvivenza,* dette anche impropriamente *tavole di mortalità,* fanno conoscere sopra un dato numero di individui (ad esempio 100000), che si suppongono nati nello stesso giorno, il numero di quelli che ancora sono in vita alla fine di ogni successivo anno, cioè quanti individui sopravvivono all'età di un anno preciso, quanti all'età di 2 anni, quanti a quella di 3, ecc., fino all'estinzione del gruppo considerato ([1]).

I metodi più in uso per la costruzione delle tavole di sopravvivenza sono i seguenti, cioè: il metodo dei decessi; il metodo dei viventi; il metodo del confronto delle nascite coi decessi; il metodo dei decessi in rapporto ai viventi.

a) **Metodo dei decessi**

Si determina quanti furono i morti per un certo numero d'anni e per ciascun anno secondo le rispettive età, cioè quanti furono i morti da *0* a *1* anno, da *1* a *2* anni, da *3* a *4* anni, ecc., e poscia si calcolano le medie dei decessi corrispondenti alle varie età. Indicando con

d_1	la media dei decessi	da	0 a 1 anno
d_2	»	»	1 a 2 anni
d_3	»	»	2 a 3 »
.	.	.	.
d_{100}	»	»	99 a 100 »

([1]) Le *tavole di mortalità*, indicano quanti individui su 100 o su 1000, che entrano in un dato anno di età, muoiono nel corso dell'anno. Così, se i superstiti all'età di 20 anni sono 66524 e quelli all'età di 21 anni sono 66100, la differenza di 424 indica il numero degli individui morti nell'età da 20 a 21 anni, ciò che corrisponde al quoziente di mortalità del 6,37 ‰.

e con S_0 il loro totale, sarà

$$S_0 = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots + d_{100}$$

il quale si considera come il numero totale dei viventi all'età *0*.

Se ora da questo totale S_0 si deduce il termine d_1, ossia il numero dei decessi da *0* a *1* anno, si avrà il numero dei superstiti all'età di *1* anno, e che indicheremo con S_1. Deducendo da quest'ultimo il termine d_2, ossia il numero dei decessi da 1 a 2 anni, si avrà il numero dei superstiti all'età di 2 anni, che indicheremo con S_2. Proseguendo nello stesso modo, si avrà

$$S_0 - d_1 = S_1$$
$$S_1 - d_2 = S_2$$
$$S_2 - d_3 = S_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$S_{99} - d_{100} = S_{100}$$

sino ad ottenere un residuo eguale a zero.

Adunque, il numero dei superstiti a ciascuna età sarà espresso da

$$S_0, \ S_1, \ S_2, \ S_3, \ \ldots \ S_{100}$$

Questo metodo è inesatto, poichè suppone che nel periodo d'anni che si considera sia costante il numero delle nascite e dei decessi, e che non abbiano avuto luogo altre cause che variano la popolazione, come le emigrazioni e le immigrazioni.

b) **Metodo dei viventi**

Questo metodo consiste nel dedurre dai censimenti il numero dei viventi a ciascuna età.

Chiamando rispettivamente con l_0, l_1, l_2, ... i viventi all'età da *0* a *1* anno, da *1* a *2* anni, da *2* a *3* anni, ecc., la differenza $l_0 - l_1$ rappresenterà il numero dei decessi all'età da *0* a *1* anno, $l_1 - l_2$ i decessi all'età da *1* a *2* anni, $l_2 - l_3$ i decessi all'età da *2* a *3* anni, e così di seguito. Quindi si potranno considerare i numeri l_0, l_1, l_2, l_3, ... come esprimenti il numero dei superstiti alle diverse età.

Anche questo metodo ha gli stessi difetti del precedente.

c) Metodo del confronto delle nascite coi decessi

Considerate le nascite di un anno come uniformemente distribuite nel corso del medesimo, si prende la media del numero delle nascite durante due o più anni consecutivi, e si considera questo numero come altrettanti individui nati tutti nello stesso giorno, ad esempio, il 1.° gennaio.

Dai registri mortuari si desume il numero dei decessi di età da *0* a *1* anno avvenuti nel primo anno, e deducendo questo numero dal totale delle nascite, la differenza indicherà il numero dei nati che raggiunsero l'età di *1* anno. Da questo numero deducendo poi quello dei decessi di età da *1* a *2* anni avvenuti nel secondo anno, si avrà il numero degli individui che raggiunsero l'età di *2* anni.

Proseguendo nello stesso modo per gli anni successivi, si otterrà il numero dei viventi alle età di 1, 2, 3 . . . anni, i quali numeri formeranno la tavola di sopravvivenza.

Questo metodo è inesatto, perchè considera le nascite uniformemente distribuite nel corso dell'anno, e perchè non tiene conto delle emigrazioni ed immigrazioni.

d) Metodo dei decessi in rapporto ai viventi

Questo metodo, detto anche *metodo diretto*, consiste nel desumere dal censimento la popolazione e i decessi per gruppi di età, e poscia nel dividere il numero dei decessi corrispondenti ad una data età per il numero che esprime la popolazione a quella stessa età, ottenendosi ciò che prende il nome di *decima mortuaria*.

Stabilita la decima mortuaria per tutte le età, si considera un numero di individui (in generale si prende un numero tondo, come 10000, 100000, ecc.) che si suppongono tutti nati nel medesimo giorno; moltiplicando questo numero per la decima mortuaria da *0* a *1* anno, si ha il numero probabile dei decessi che si verificheranno in tale periodo, e con una sottrazione si potrà calcolare il numero degli individui che raggiungono l'età di *1* anno. Moltiplicando poscia quest'ultimo numero per la decima mortuaria da *1* a *2* anni, si viene a conoscere il numero probabile dei decessi di questo secondo periodo, e si potrà quindi dedurre il numero degli individui che raggiungono l'età di 2 anni. Allo stesso modo si procede per i periodi successivi.

Nella pagina seguente riporto la tavola di sopravvivenza della popolazione italiana (maschi e femmine) calcolata dalla Direzione Generale della Statistica in base ai risultati del censimento dell'anno 1901.

Altre tavole di sopravvivenza usate da alcune Compagnie d'assicurazione sulla vita sono quelle francesi di Duvillard e Deparcieux, e specialmente quelle delle 20 Compagnie inglesi e contraddistinte coi simboli H^M per i maschi e H^F per le femmine, e la prima delle quali pure riporto in appresso.

I. - TAVOLA DI SOPRAVVIVENZA

della popolazione italiana calcolata in base ai risultati del censimento dell'anno 1901

Età — Anni	Sopravviventi		Età — Anni	Sopravviventi		Età — Anni	Sopravviventi	
	Maschi	Femmine		Maschi	Femmine		Maschi	Femmine
0	100 000	100 000	35	60 118	59 688	70	28 378	29 706
1	82 481	84 128	36	59 696	59 200	71	26 480	27 704
2	76 231	77 622	37	59 264	58 707	72	24 522	25 621
3	73 574	74 759	38	58 819	58 203	73	22 514	23 481
4	72 158	73 265	39	58 355	57 689	74	20 516	21 338
5	71 222	72 232	40	57 874	57 171	75	18 535	19 212
6	70 605	71 555	41	57 377	56 652	76	16 581	17 121
7	70 098	70 986	42	56 865	56 136	77	14 671	15 087
8	69 719	70 549	43	56 338	55 622	78	12 824	13 132
9	69 405	70 206	44	55 790	55 111	79	11 061	11 279
10	69 136	69 915	45	55 230	54 601	80	9 401	9 549
11	68 891	69 648	46	54 654	54 089	81	7 863	7 960
12	68 681	69 405	47	54 058	53 578	82	6 462	6 526
13	68 477	69 152	48	53 441	53 064	83	5 210	5 256
14	68 278	68 902	49	52 797	52 531	84	4 127	4 163
15	68 054	68 609	50	52 124	51 974	85	3 200	3 231
16	67 819	68 284	51	51 420	51 389	86	2 431	2 459
17	67 561	67 934	52	50 675	50 759	87	1 807	1 839
18	67 254	67 566	53	49 885	50 109	88	1 313	1 349
19	66 912	67 183	54	49 089	49 460	89	933	969
20	66 524	66 782	55	48 274	48 794	90	647	683
21	66 100	66 373	56	47 421	48 090	91	441	477
22	65 652	65 934	57	46 518	47 330	92	297	330
23	65 204	65 463	58	45 553	46 501	93	197	226
24	64 759	64 988	59	44 518	45 576	94	129	152
25	64 318	64 510	60	43 408	44 551	95	84	100
26	63 882	64 029	61	42 199	43 414	96	54	65
27	63 451	63 548	62	40 919	42 220	97	34	43
28	63 025	63 066	63	39 572	40 936	98	21	27
29	62 605	62 584	64	38 160	39 571	99	13	17
30	62 188	62 103	65	36 689	38 127	100	8	10
31	61 773	61 622	66	35 160	36 603			
32	61 360	61 141	67	33 573	35 006			
33	60 948	60 657	68	31 931	33 337			
34	60 535	60 174	69	30 202	31 571			

II. - TAVOLA DI SOPRAVVIVENZA H^M

delle 20 Compagnie inglesi

Età — Anni	Numero dei sopravviventi	Età — Anni	Numero dei sopravviventi	Età — Anni	Numero dei sopravviventi	Età — Anni	Numero dei sopravviventi
10	100 000	35	86 281	60	58 866	85	5 422
11	99 510	36	85 524	61	57 119	86	4 284
12	99 113	37	84 745	62	55 289	87	3 343
13	98 784	38	83 943	63	53 374	88	2 570
14	98 496	39	83 122	64	51 373	89	1 955
15	98 224	40	82 284	65	49 297	90	1 460
16	97 942	41	81 436	66	47 156	91	1 052
17	97 624	42	80 582	67	44 960	92	723
18	97 245	43	79 717	68	42 717	93	469
19	96 779	44	78 830	69	40 443	94	274
20	96 223	45	77 919	70	38 124	95	135
21	95 614	46	76 969	71	35 753	96	49
22	94 971	47	75 973	72	33 320	97	9
23	94 321	48	74 932	73	30 823	98	0
24	93 683	49	73 850	74	28 269		
25	93 061	50	72 726	75	25 691		
26	92 444	51	71 566	76	23 164		
27	91 826	52	70 373	77	20 700		
28	91 192	53	69 138	78	18 326		
29	90 538	54	67 852	79	16 068		
30	89 865	55	66 513	80	13 930		
31	89 171	56	65 114	81	11 915		
32	88 465	57	63 652	82	10 032		
33	87 748	58	62 125	83	8 313		
34	87 021	59	60 533	84	6 768		

Le tavole di sopravvivenza servono a far conoscere: 1° la probabilità che ha un individuo di raggiungere una data età; 2° la probabilità che ha un individuo di una data età di morire prima di avere raggiunto un'altra età pure stabilita; 3° la probabilità che hanno due o più individui di sopravvivere insieme per un certo numero d'anni; 4° la vita probabile di un individuo; 5° la vita media degli individui aventi una certa età; 6° il quoziente e la tassa centrale di mortalità.

e) Probabilità di raggiungere una certa età

Per determinare la probabilità che ha una persona dell'età x di raggiungere l'età $x+n$, bisogna ricercare nelle tavole di sopravvivenza quanti sopravviventi rimangono alle due età indicate. Chiamati l_x e l_{x+n} i rispettivi numeri, il quoziente $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ rappresenta la probabilità cercata.

Adunque, la probabilità di raggiungere una certa età è data da una frazione che ha per numeratore il numero dei sopravviventi all'età maggiore e per denominatore il numero dei sopravviventi all'età minore.

Se, ad esempio, si vuol sapere quale è la probabilità che una persona di 30 anni raggiunga l'età di 50, si osserva nella tavola I di sopravvivenza che sopra 100000 individui maschi 62188 sono sopravviventi a 30 anni e di questi 52124 sono ancora vivi a 50; quindi quella probabilità è rappresentata dalla frazione $\frac{52124}{62188}$.

Problema 1. — Suppongasi che una persona che ha ora 30 anni abbia diritto di ritirare la somma di L. 10000 se raggiungerà l'età di 50 anni, e che si voglia calcolare la speranza matematica, o il valore attuale, di tale somma eventuale.

Il valore attuale della somma di L. 10000 esigibile fra 20 anni, calcolando lo sconto composto del 4 %, è dato da

$$\frac{10000}{1{,}04^{20}} = \frac{10000}{2{,}1911231} = \text{L. } 4563{,}87$$

Il valore della somma eventuale sarà perciò

$$\text{L. } 4563{,}87 \times \frac{52124}{62188} = \text{L. } 3824{,}52$$

f) Probabilità di non raggiungere una certa età

Se $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ rappresenta la probabilità di sopravvivere da x a $x+n$ anni, la probabilità contraria, ossia che una persona dell'età x non raggiunga l'età $x+n$, cioè che muoia prima, sarà rappresentata da

$$1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

e quindi dal rapporto fra il numero degli individui decessi all'età $x+n$ e quello dei sopravviventi alla età attuale x di quella persona.

Se, ad esempio, si vuol sapere quale è la probabilità che ha un individuo di 20 anni di morire prima di avere raggiunto l'età di 40 anni, dalla tavola I di sopravvivenza si vede che su 66524 individui viventi all'età di 20 anni solamente 57874 raggiungono l'età di 40 anni, cioè 8650 muoiono prima di avere raggiunto tale età, per cui la probabilità cercata sarà data dalla frazione $\frac{8650}{66524}$.

Problema 2. — Tizio che ha 40 anni ha diritto di riscuotere L. 15000 fra 12 anni, ma tale somma sarà pagata a Caio se Tizio fra 12 anni non sarà più in vita. Si domanda quale è per Caio il valore attuale di tale somma eventuale, tenendo conto dello sconto composto del 5 %.

Se Caio fosse sicuro di riscuotere tale somma fra 12 anni, il suo valore attuale sarebbe

$$\frac{15000}{1{,}05^{12}} = \frac{15000}{1{,}7958563} = \text{L. } 8352{,}56$$

ma a tale scopo bisogna che Tizio non raggiunga i 52 anni di età. Ora, dalla tavola I di sopravvivenza si ha che su 57874 individui di 40 anni solamente 50675 raggiungono i 52 anni e 7199 muoiono prima, per cui la probabilità che ha Tizio di morire prima di avere raggiunto 52 anni di età sarà $\frac{7199}{57874}$ ed il valore della somma eventuale da riscuotersi da Caio sarà

$$\text{L. } 8352{,}56 \times \frac{7199}{57874} = \text{L. } 1038{,}98$$

Per trovare la probabilità che una persona di x anni muoia fra l'età $x+n$ e l'età $x+n+t$, basta sottrarre dalla probabilità che quella persona ha di vivere $x+n$ anni la probabilità che ha di vivere $x+n+t$ anni.

Così, se calcoliamo la probabilità che una persona di 35 anni muoia fra i 55 e i 60 anni, si avrà:

$$\frac{48274}{60118} - \frac{43408}{60118} = 0{,}803 - 0{,}722 = 0{,}081$$

g) Gruppi di più teste

La probabilità che due persone di una data età sopravvivano insieme un certo numero d'anni, presenta un caso di probabilità composta, la quale sarà eguale al prodotto delle probabilità semplici che avrà ciascuna delle due persone di raggiungere l'età considerata.

Supposte pertanto x e n le età delle due persone, la probabilità che hanno di sopravvivere insieme t anni sarà espressa da

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} \times \frac{l_{n+t}}{l_n}$$

Così, ad esempio, se un individuo di 30 anni e sua moglie di 25 desiderano di sapere quale è la probabilità ch'essi hanno di vivere ancora insieme 20 anni, dalla tavola I di sopravvivenza si ha che la probabilità che ha il primo di vivere ancora 20 anni, cioè di raggiungere l'età di 50 anni, è $\frac{52124}{62188}$, e la probabilità che ha sua moglie di raggiungere l'età di 45 anni è $\frac{54601}{64510}$, per cui la probabilità che hanno ancora di vivere insieme per altri 20 anni, sarà

$$\frac{52124}{62188} \times \frac{54601}{64510} = \frac{2846022524}{4011747880} = \frac{7}{10}$$

Problema 3. — Suppongasi che le dette due persone abbiano diritto di esigere fra 20 anni L. 20000, se saranno vive entrambe, e che si voglia conoscere il valore attuale di tale somma eventuale, calcolando lo sconto composto del 4 %. Sarà

$$\frac{20000}{1{,}04^{20}} \times \frac{7}{10} = 9127{,}74 \times \frac{7}{10} = \text{L. } 6389{,}42$$

Se si vuole determinare la probabilità che dopo t anni la persona di età x sia viva e l'altra di età n sia morta, si dovrà eseguire il prodotto

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} \times \left(1 - \frac{l_{n+t}}{l_n}\right)$$

Così, la probabilità che dopo 20 anni la prima persona di 30 anni sia ancora viva e la seconda di 25 sia morta, sarà

$$\frac{52124}{62188} \times \left(1 - \frac{54601}{64510}\right) = 0{,}838 \times (1 - 0{,}846) = 0{,}129$$

Se, invece, si cerca la probabilità che dopo t anni viva ancora la persona di età n e sia morta quella di età x, si avrà il prodotto

$$\frac{l_{n+t}}{l_n} \times \left(1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}\right)$$

Così, nel caso precedente, sarà

$$\frac{54601}{64510} \times \left(1 - \frac{52124}{62188}\right) = 0{,}846 \times (1 - 0{,}838) = 0{,}137$$

Se poi si domanda la probabilità che dopo t anni una delle due persone sia viva e l'altra morta, senza fissare quale debba essere viva, bisogna ricorrere alla probabilità totale. Infatti, il fatto aspettato può avere luogo per due cause, o perchè vive la prima persona e muore la seconda, o viceversa. Quindi per il solito caso supposto, la probabilità sarà

$$0{,}129 + 0{,}137 = 0{,}266$$

h) **Vita probabile**

Per *vita probabile,* intendesi il numero di anni dopo i quali gli individui di una medesima età sono ridotti a metà per successive morti.

Ad esempio, la vita probabile di un individuo di 40 anni è quel numero di anni dopo i quali gli individui aventi ora 40 anni si riducono per morte alla sola metà.

Dalla tavola I di sopravvivenza scorgendosi che a 40 anni i sopravviventi sono 57874 sopra 100000 individui maschi, si cercherà in quale anno essi si riducono alla metà, ossia a 28937, e si troverà che quest'anno è compreso fra il 69, in cui i sopravviventi sono 30202, ed il 70, in cui sono 28378, per cui la vita probabile sarà compresa fra i 29 ed i 30 anni.

Volendo calcolare anche la frazione d'anno, basta osservare che la differenza tra i sopravviventi a 69 anni e la metà di quelli sopravviventi a 40 anni è 1265 (30202 — 28937), e la differenza tra i primi e quelli sopravviventi a 70 anni è 1824

(30202 — 28378), per ciò, dividendo la prima differenza per la seconda, si ha

$$1265 : 1824 = \text{anni } 0{,}6935$$

e quindi

$$0{,}6935 \times 12 = \text{mesi } 8$$

Adunque, la vita probabile di un individuo di 40 anni è di anni 29, mesi 8.

Alla pagina seguente trovasi la tavola della vita probabile della popolazione italiana (maschi e femmine) calcolata dalla Direzione Generale della Statistica in base ai risultati del censimento dell'anno 1901.

i) **Vita media**

Per *vita media*, s'intende il numero totale degli anni vissuti dagli individui di una certa età diviso per il numero degli individui costituenti il gruppo.

Sia l_x il gruppo iniziale, di cui si vuol calcolare la vita media, e composto degli individui che hanno raggiunto l'età di anni x, siano l_{x+1}, l_{x+2}, ecc., i successivi gruppi degli individui che hanno raggiunto l'età di anni $x+1$, $x+2$, ecc., e sia l_{x+n} il gruppo degli individui viventi nell'ultimo anno n.

La differenza tra il primo gruppo l_x ed il successivo l_{x+1}, cioè $l_x - l_{x+1}$, sarà costituita dai morti nel corso del primo anno, ciascuno dei quali può ritenersi abbia vissuto in media per $\frac{1}{2}$ anno.

La differenza tra il secondo gruppo l_{x+1} ed il successivo l_{x+2}, cioè $l_{x+1} - l_{x+2}$, sarà costituita dai morti nel corso del secondo anno, ciascuno dei quali avrà vissuto in media, a partire dall'età x, un anno e mezzo, cioè $\frac{3}{2}$ di anno.

La differenza tra il gruppo dei superstiti l_{x+2} ed il gruppo l_{x+3}, cioè $l_{x+2} - l_{x+3}$, sarà costituita dai morti nel corso del terzo anno, ciascuno dei quali avrà vissuto in media, a partire dall'età x, due anni e mezzo, cioè $\frac{5}{2}$ di anno, e così di seguito.

Ora, è chiaro che il gruppo considerato vivrà in totale anni

$$\frac{1}{2}\left(l_x - l_{x+1}\right) + \frac{3}{2}\left(l_{x+1} - l_{x+2}\right) + \frac{5}{2}\left(l_{x+2} - l_{x+3}\right) + \ldots$$

III. - TAVOLA DELLA VITA PROBABILE

della popolazione italiana calcolata in base ai risultati del censimento dell'anno 1901

Età — Anni	Vita probabile				Età — Anni	Vita probabile				Età — Anni	Vita probabile			
	Maschi		Femmine			Maschi		Femmine			Maschi		Femmine	
	Anni	Mesi	Anni	Mesi		Anni	Mesi	Anni	Mesi		Anni	Mesi	Anni	Mesi
0	52	7	53	2	35	34	-	34	11	70	7	2	7	1
1	60	7	61	2	36	33	1	34	-	71	6	9	6	8
2	61	11	62	6	37	32	3	33	2	72	6	4	6	2
3	61	10	62	6	38	31	4	32	4	73	5	11	5	9
4	61	4	61	11	39	30	6	31	5	74	5	6	5	4
5	60	7	61	3	40	29	8	30	6	75	5	1	5	-
6	59	10	60	5	41	28	9	29	8	76	4	8	4	7
7	59	1	59	8	42	27	11	28	10	77	4	4	4	3
8	58	2	58	10	43	27	-	27	11	78	4	-	4	-
9	57	3	57	11	44	26	3	27	-	79	3	8	3	8
10	56	4	57	-	45	25	5	26	2	80	3	5	3	5
11	55	5	56	-	46	24	6	25	4	81	3	2	3	2
12	54	6	55	2	47	23	7	24	5	82	3	-	3	-
13	53	7	54	3	48	22	9	23	7	83	2	11	2	11
14	52	7	53	4	49	21	11	22	8	84	2	9	2	7
15	51	8	52	4	50	21	-	21	10	85	2	6	2	5
16	50	9	51	6	51	20	4	20	11	86	2	3	2	2
17	49	10	50	7	52	19	6	20	1	87	2	1	2	1
18	48	11	49	8	53	18	9	19	2	88	1	11	2	-
19	48	-	48	10	54	17	11	18	5	89	1	10	1	11
20	47	2	47	11	55	17	1	17	6	90	1	10	1	11
21	46	4	47	-	56	16	4	16	8	91	1	9	1	10
22	45	6	46	2	57	15	7	15	11	92	1	8	1	9
23	44	7	45	3	58	14	10	15	2	93	1	8	1	8
24	43	8	44	5	59	14	-	14	4	94	1	7	1	8
25	42	10	43	6	60	13	4	13	6	95	1	6	1	7
26	42	-	42	8	61	12	7	12	10	96	1	5	1	6
27	41	1	41	10	62	11	11	12	1	97	1	5	1	6
28	40	2	41	-	63	11	3	11	5	98	1	5	1	4
29	39	4	40	1	64	10	7	10	8	99	1	2	1	1
30	38	5	39	3	65	10	-	10	-	100	-	6	-	6
31	37	7	38	5	66	9	5	9	5					
32	36	8	37	6	67	8	10	8	10					
33	35	10	36	7	68	8	4	8	2					
34	34	11	35	10	69	7	10	7	8					

ossia, risolvendo le parentesi e semplificando, anni

$$\frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_{x+n}$$

Quindi in media ogni individuo del gruppo l_x avrà vissuto, a partire dall'età x, anni

$$\frac{\frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots . l_{x+n}}{l_x}$$

formola che si può scrivere anche nel seguente modo

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} \ldots . + l_{x+n}}{l_x} + \frac{1}{2}$$

La vita media adunque si ottiene, moltiplicando il numero dei morti di ogni successivo gruppo di età per il numero di anni vissuti dopo l'età che si è presa come punto di partenza, addizionando tutti questi prodotti e dividendo il risultato per il numero dei viventi del gruppo da cui si è partiti.

Ad esempio, dalla tavola I di sopravvivenza si ha che di 647 individui maschi sopra 100000 dell'età *0* che raggiungono l'età di 90 anni, soltanto 441 raggiungono l'età di 91 anni, e quindi 206 muoiono nel corso dell'anno, ossia si può supporre che abbiano vissuto $^1/_2$ anno ciascuno; i sopravviventi a 92 anni essendo 297, altri 144 individui del gruppo hanno vissuto ciascuno anni 1 $^1/_2$; i sopravviventi a 93 anni essendo 197, altri 100 individui del gruppo hanno vissuto ciascuno anni 2 $\frac{1}{2}$, e così di seguito fino alla completa estinzione della generazione cui appartiene il gruppo preso in considerazione. Di guisa che il gruppo sopradetto ha vissuto in totale

$$\text{anni} \left\{ \frac{1}{2}(647 - 441) + \frac{3}{2}(441 - 297) + \frac{5}{2}(297 - 197) + \right.$$

$$+ \frac{7}{2}(197 - 129) + \frac{9}{2}(129 - 84) + \frac{11}{2}(84 - 54) + \frac{13}{2}(54 - 34) +$$

$$\left. + \frac{15}{2}(34 - 21) + \frac{17}{2}(21 - 13) + \frac{19}{2}(13 - 8) + \frac{21}{2}(8 - 0) \right\}$$

$$= \text{anni} \left(\frac{1}{2} 647 + 441 + 297 + 197 + 129 + 84 + 54 + 34 + 21 + 13 + 8 \right)$$

$$= \text{anni } 1601 \, ^1/_2 .$$

IV. - TAVOLA DELLA VITA MEDIA

della popolazione italiana calcolata in base ai risultati del censimento dell'anno 1901

Età — Anni	Vita media				Età — Anni	Vita media				Età — Anni	Vita media			
	Maschi		Femmine			Maschi		Femmine			Maschi		Femmine	
	Anni	Mesi	Anni	Mesi		Anni	Mesi	Anni	Mesi		Anni	Mesi	Anni	Mesi
0	42	10	43	2	35	31	11	32	5	70	7	11	7	10
1	50	8	50	1	36	31	1	31	8	71	7	6	7	5
2	53	11	53	4	37	30	5	31	-	72	7	-	6	11
3	55	-	54	5	38	29	7	30	2	73	6	7	6	6
4	55	1	54	7	39	28	10	29	5	74	6	4	6	2
5	54	9	54	4	40	28	-	28	8	75	5	11	5	10
6	54	2	53	10	41	27	4	28	-	76	5	6	5	5
7	53	7	53	3	42	26	6	27	2	77	5	2	5	1
8	52	11	52	7	43	25	9	26	6	78	4	11	4	10
9	52	-	51	9	44	25	-	25	8	79	4	7	4	6
10	51	3	51	-	45	24	5	24	10	80	4	4	4	2
11	50	6	50	2	46	23	5	24	2	81	4	-	3	11
12	49	8	49	5	47	22	9	23	5	82	3	10	3	8
13	48	10	48	7	48	22	-	22	7	83	3	8	3	7
14	47	11	47	9	49	21	4	21	11	84	3	6	3	5
15	47	1	47	-	50	20	6	21	1	85	3	3	3	2
16	46	2	46	1	51	19	10	20	5	86	3	1	3	-
17	45	5	45	5	52	19	1	19	7	87	2	10	2	10
18	44	7	44	8	53	18	5	18	10	88	2	8	2	9
19	43	10	43	11	54	17	8	18	1	89	2	7	2	8
20	43	1	43	2	55	17	-	17	4	90	2	6	2	7
21	42	4	42	5	56	16	4	16	7	91	2	5	2	6
22	41	8	41	9	57	15	7	15	10	92	2	4	2	5
23	40	11	41	-	58	14	11	15	1	93	2	2	2	3
24	40	2	40	3	59	14	4	14	5	94	2	1	2	2
25	39	6	39	8	60	13	7	13	8	95	2	-	2	1
26	38	9	38	11	61	13	-	13	1	96	1	11	2	-
27	38	-	38	2	62	12	4	12	5	97	1	8	1	9
28	37	2	37	4	63	11	10	11	10	98	1	6	1	6
29	36	6	36	10	64	11	2	11	2	99	1	1	1	2
30	35	8	36	-	65	10	7	10	7	100	-	6	-	6
31	35	-	35	4	66	10	-	10	-					
32	34	3	34	8	67	9	5	9	5					
33	33	5	33	10	68	9	-	8	11					
34	32	7	33	-	69	8	5	8	5					

E quindi in media un individuo del gruppo ha vissuto

$$1601\,{}^1/_2 : 647 = \text{anni } 2, \text{ mesi } 6.$$

Nella pagina precedente è riprodotta la tavola della vita media della popolazione italiana (maschi e femmine) calcolata dalla Direzione Generale della Statistica in base ai risultati del censimento dell'anno 1901.

Per gli scopi pratici delle assicurazioni, pensioni, ecc., può occorrere di determinare la *vita media per due teste*, cioè la durata della convivenza per due persone aventi la stessa età o età diversa (marito e moglie, padre e figlio, ecc.) La formola da applicarsi è la seguente:

$$D_{x,\,y} = \frac{l_{x+1} \cdot l_{y+1} + l_{x+2} \cdot l_{y+2} + \cdots l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} + \frac{1}{2}$$

dove $D_{x,\,y}$ indica la durata della media convivenza di individui dell'età x con individui dell'età y; l_x, l_{x+1}, ecc., sono i sopravviventi all'età x, $x+1$, ecc., della categoria a cui appartengono i primi individui; l_y, l_{y+1}, ecc., i sopravviventi alle età y, $y+1$, ecc., della categoria a cui appartengono i secondi individui.

l) Quoziente e tassa centrale di mortalità

Il *quoziente di mortalità*, relativo ad un dato periodo di vita, è il quoziente che si ottiene dividendo la probabilità che ha un individuo di una certa età di morire prima di una successiva età, per il numero degli anni che decorrono fra le due età considerate.

Così, dalla tavola I di sopravvivenza si ha che un individuo di 30 anni per raggiungere l'età di 50 ha la probabilità favorevole, cioè di sopravvivere, rappresentata da $\frac{52124}{62188}$ e quella contraria, cioè di morire, espressa da $\frac{10064}{62118}$, per cui dividendo quest'ultima frazione per 20 (50 — 30) si otterrà il quoziente di mortalità relativo al periodo di vita dai 30 ai 50 anni, cioè si avrà

$$\frac{10064}{62118} : 20 = \frac{10064}{62118 \times 20} = 0{,}00809$$

In generale, il quoziente di mortalità di un individuo dell'età x rispetto all'età $x+n$, sarà

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{n \times l_x}$$

La *tassa centrale di mortalità,* è il quoziente di mortalità quando fra le due età considerate decorre un anno, cioè è la probabilità di morire entro un anno alle diverse età, e quindi rispetto all'età x è rappresentata dall'espressione

$$\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Così, per l'età di anni 30, la tassa centrale di mortalità sarà

$$\frac{62188 - 61773}{62188} = 0{,}00667$$

ossia del 6,67 ‰ (V. pag. 7).

CAPO III.

Assicurazioni in caso di vita

Abbiamo veduto che le assicurazioni in caso di vita possono essere di *capitale* e di *rendite vitalizie,* le quali poi si suddividono in *rendite immediate,* in *rendite differite* o *protratte* ed in *rendite temporanee* (V. pag. 4).

Le rendite vitalizie possono essere ancora *annue,* o *semestrali,* o *trimestrali,* ecc., secondo che il periodo di tempo in cui sono pagabili è l'anno, il semestre, il trimestre, ecc., e *anticipate* o *posticipate,* secondo che sono pagabili al principio o al termine del periodo stesso.

a) Rendite vitalizie immediate

Rendite immediate posticipate. — Per ricercare il premio unico che dovrà pagare una persona di una certa età per avere diritto all'esazione di una rendita vitalizia immediata pagabile ad intervalli eguali di tempo, occorre determinare il valore capitale attuale di tutte le quote di rendita che l'assicurato riscuoterà alla loro scadenza, se sarà ancora in vita, e poscia addizionare questi valori attuali.

Sia a_x il premio unico che si cerca, ossia il valore capitale attuale di una rendita vitalizia immediata di 1 lira annua posticipata che si vuole costituire, essendo x l'età della persona assicurata ed r il saggio annuo d'interesse.

Il valore attuale delle diverse quote di rendita pagabili fra anni 1, 2, 3 . . . n sarà dato da

$$\frac{1}{(1+r)}, \frac{1}{(1+r)^2}, \frac{1}{(1+r)^3} \cdots\cdots \frac{1}{(1+r)^n}$$

Ma non essendo certo, e soltanto probabile, che la persona viva 1, 2, 3 . . . n anni, è evidente che i detti valori dovranno essere moltiplicati per la frazione che rappresenta la probabilità che ha quella persona di vivere ancora l'indicato numero di anni.

Chiamando l_x, l_{x+1}, l_{x+2} .... il numero dei sopravviventi che hanno rispettivamente l'età di anni $x, x+1, x+2 \ldots$, la probabilità che ha la persona considerata di vivere ancora dopo 1, 2, 3 ... n anni, sarà (V. pag. 13)

$$\frac{l_{x+1}}{l_x}, \frac{l_{x+2}}{l_x}, \frac{l_{x+3}}{l_x} \ldots$$

Ora, moltiplicando per le loro probabilità i valori attuali delle diverse quote di rendita prima trovati, si avranno le seguenti *speranze matematiche* di riscuotere le somme indicate

$$\frac{1}{(1+r)} \times \frac{l_{x+1}}{l_x}, \frac{1}{(1+r)^2} \times \frac{l_{x+2}}{l_x}, \frac{1}{(1+r)^3} \times \frac{l_{x+3}}{l_x} \ldots$$

Quindi il valore attuale a_x della rendita vitalizia immediata di 1 lira sarà la somma di dette speranze matematiche, cioè

$$a_x = \frac{1}{l_x} \left\{ \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \frac{l_{x+3}}{(1+r)^3} + \ldots \right\}$$

e rappresentando con Q_x la quantità fra parentesi, si avrà

$$a_x = \frac{Q_x}{l_x} \qquad (1)$$

La quantità l_x è data dalle tavole di sopravvivenza, basterà quindi calcolare Q_x, e da esso si potrà ricavare il valore di Q_{x-1}, e da questo quello di Q_{x-2}, e così di seguito. Infatti, essendo

$$Q_x = \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \frac{l_{x+3}}{(1+r)^3} + \ldots \quad (a)$$

ad x sostituendo $x-1$ si ha

$$Q_{x-1} = \frac{l_x}{(1+r)} + \frac{l_{x+1}}{(1+r)^2} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^3} + \ldots \quad (b)$$

e dividendo i due membri della prima eguaglianza (*a*) per $(1+r)$ si ottiene

$$\frac{Q_x}{(1+r)} = \frac{l_{x+1}}{(1+r)^2} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^3} + \frac{l_{x+3}}{(1+r)^4} + \dots \quad (c)$$

Sottraendo ora membro a membro dell'eguaglianza (*b*) l'eguaglianza (*c*), si ha

$$Q_{x-1} - \frac{Q_x}{(1+r)} = \frac{l_x}{(1+r)} \quad \text{ossia} \quad Q_{x-1} = \frac{Q_x + l_x}{(1+r)}$$

la quale formola dà il modo di calcolare il valore di Q_{x-1} conoscendo quello di Q_x.

In modo analogo si trova

$$Q_{x-2} = \frac{Q_{x-1} + l_{x-1}}{(1+r)}$$

conoscendo Q_{x-1}, e così di seguito.

Con tale procedimento si può costruire una tavola che indichi il valore attuale o premio unico a_x da pagarsi da una persona di qualunque età per costituirsi una rendita vitalizia immediata posticipata di 1 lira annua.

La tavola V che segue è calcolata in base alla tavola I di sopravvivenza della popolazione maschile italiana [1], e la tavola VI in base ai dati della tavola II di sopravvivenza maschile inglese H^M [2].

---

(1) V. *Annali del Credito e della Previdenza* (anno 1908) pubblicati dal Ministero d'Industria, Agricoltura e Commercio.

(2) Se l'età attuale di un individuo è espressa da un numero intero di anni, più una frazione, si può trascurare la frazione, se inferiore a 6 mesi, od aumentarla sino ad un anno, se è eguale o superiore a 6 mesi, indi applicare la tavola. Più esattamente, si prenderà la media dei valori attuali delle rendite corrispondenti alle età contigue di x e $x+1$ anni.

In modo analogo si può procedere qualora si voglia determinare un valore attuale relativo ad una tassa d'interesse compresa fra quelle date dalla tavola.

Se poi le rendite vitalizie sono anticipate, si otterrà il relativo valore aggiungendo 1 lira al valore attuale indicato dalla tavola.

V. - TAVOLA

che dà il valore attuale a_x della rendita vitalizia immediata di 1 lira annua posticipata, calcolata in base alla tavola di sopravvivenza della popolazione maschile italiana — interesse 4 %

Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira
0	15,375	25	18,316	50	12,747	75	4,484
1	18,387	26	18,178	51	12,439	76	4,213
2	19,690	27	18,034	52	12,126	77	3,952
3	20,217	28	17,882	53	11,811	78	3,702
4	20,439	29	17,722	54	11,483	79	3,464
5	20,535	30	17,544	55	11,144	80	3,239
6	20,544	31	17,379	56	10,797	81	3,027
7	20,520	32	17,196	57	10,448	82	2,831
8	20,457	33	17,005	58	10,096	83	2,652
9	20,371	34	16,805	59	9,744	84	2,482
10	20,268	35	16,599	60	9,393	85	2,328
11	20,154	36	16,385	61	9,048	86	2,188
12	20,024	37	16,165	62	8,704	87	2,061
13	19,887	38	15,938	63	8,361	88	1,950
14	19,743	39	15,708	64	8,017	89	1,853
15	19,600	40	15,472	65	7,672	90	1,780
16	19,455	41	15,230	66	7,326	91	1,715
17	19,311	42	14,982	67	6,979	92	1,649
18	19,175	43	14,727	68	6,631	93	1,586
19	19,044	44	14,466	69	6,291	94	1,518
20	18,921	45	14,198	70	5,964	95	1,425
21	18,804	46	13,921	71	5,647	96	1,306
22	18,689	47	13,638	72	5,342	97	1,157
23	18,571	48	13,347	73	5,051	98	0,947
24	18,446	49	13,050	74	4,764	99	0,592

VI. - TAVOLA

che dà il valore attuale a_x della rendita vitalizia immediata di 1 lira annua posticipata, calcolata in base ai dati della tavola di sopravvivenza maschile inglese H^M — interesse 4 %

Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira	Età — Anni	Valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira
10	20,0765	35	16,1968	60	9,4590	85	2,6578
11	19,9824	36	15,9938	61	9,1383	86	2,4984
12	19,8649	37	15,7864	62	8,8184	87	2,3297
13	19,7283	38	15,5747	63	8,5001	88	2,1516
14	19,5775	39	15,3577	64	8,1845	89	1,9416
15	19,4169	40	15,1347	65	7,8703	90	1,7039
16	19,2518	41	14,9040	66	7,5567	91	1,4593
17	19,0870	42	14,6644	67	7,2429	92	1,2083
18	18,9279	43	14,4165	68	6,9281	93	0,9372
19	18,7798	44	14,1619	69	6,6104	94	0,6683
20	18,6438	45	13,9005	70	6,2930	95	0,4106
21	18,5131	46	13,6350	71	5,9787	96	0,1766
22	18,3840	47	13,3693	72	5,6719		
23	18,2511	48	13,0940	73	5,3766		
24	18,1104	49	12,8173	74	5,0969		
25	17,9607	50	12,5360	75	4,8326		
26	17,8038	51	12,2488	76	4,5742		
27	17,6406	52	11,9547	77	4,3235		
28	17,4737	53	11,6550	78	4,0789		
29	17,3039	54	11,3509	79	3,8382		
30	17,1309	55	11,0426	80	3,6043		
31	16,9548	56	10,7311	81	3,3824		
32	16,7737	57	10,4167	82	3,1780		
33	16,5872	58	10,0996	83	2,9886		
34	16,3948	59	9,7798	84	2,8176		

Ecco ora come è costruita la prima di dette tavole.

Dalla tavola I di sopravvivenza si ha che di 100000 individui (maschi) 8 soltanto raggiungono l'età di 100 anni, 13 l'età di 99 anni, 21 di 98 anni, ecc., ossia si ha

$$l_{100} = 8 \qquad l_{98} = 21 \qquad l_{96} = 54$$

$$l_{99} = 13 \qquad l_{97} = 34 \qquad l_{95} = 84$$

ecc.

Ora, supponendo l'interesse del 4 %, è facile determinare i valori di Q_{100}, Q_{99}, Q_{98}....... Infatti, sarà

$$Q_{100} = \frac{Q_{101} + l_{101}}{1 + r} = \frac{0 + 0}{1,04} = 0,000$$

$$Q_{99} = \frac{Q_{100} + l_{100}}{1 + r} = \frac{0 + 8}{1,04} = 7,692$$

$$Q_{98} = \frac{Q_{99} + l_{99}}{1 + r} = \frac{7,692 + 13}{1,04} = 19,896$$

$$Q_{97} = \frac{Q_{98} + l_{98}}{1 + r} = \frac{19,896 + 21}{1,04} = 39,323$$

$$Q_{96} = \frac{Q_{97} + l_{97}}{1 + r} = \frac{39,323 + 34}{1,04} = 70,503$$

$$Q_{95} = \frac{Q_{96} + l_{96}}{1 + r} = \frac{70,503 + 54}{1,04} = 119,714$$

e così di seguito.

Applicando quindi la formola (1), si avranno i seguenti valori di $a_x = \dfrac{Q_x}{l_x}$ per gli anni 100, 99, 98, 97, 96, 95....., come apparisce dalla tavola V

$$a_{100} = \frac{Q_{100}}{l_{100}} = \frac{0}{8} = 0,000$$

$$a_{99} = \frac{Q_{99}}{l_{99}} = \frac{7,692}{13} = 0,592$$

$$a_{98} = \frac{Q_{98}}{l_{99}} = \frac{19,896}{21} = 0,947$$

$$a_{97} = \frac{Q_{97}}{l_{97}} = \frac{39{,}323}{34} = 1{,}157$$

$$a_{96} = \frac{Q_{96}}{l_{96}} = \frac{70{,}503}{54} = 1{,}306$$

$$a_{95} = \frac{Q_{95}}{l_{95}} = \frac{119{,}714}{84} = 1{,}425$$

e così di seguito.

Il valore della formola (1) si può calcolare anche nel seguente modo.

Moltiplichiamo per $(1+r)^n$ i due membri dell'eguaglianza (a) (V. pag. 24)

$$Q_x = \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \frac{l_{x+3}}{(x+r)^3} + \ldots.$$

e si avrà

$$Q_x \times (1+r)^n = (1+r)^n \times \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + (1+r)^n \times \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} +$$
$$+ (1+r)^n \times \frac{l_{x+3}}{(1+r)^3} + \ldots.$$

ossia

$$Q_x \times (1+r)^n = (1+r)^{n-1} \times l_{x+1} + (1+r)^{n-2} \times l_{x+2} +$$
$$+ (1+r)^{n-3} \times l_{x+3} + \ldots.$$

e poichè $Q_x = a_x \times l_x$, si avrà pure

$$a_x \times l_x \times (1+r)^n = (1+x)^{n \quad 1} \times l_{x+1} + (1+r)^{n-2} \times l_{x+2} + \ldots.$$

il cui secondo membro consta del numero dei viventi a ciascuna età, dato dalla tavola di sopravvivenza, moltiplicato per $(1+r)^0 = 1$ l'ultimo termine, per $(1+r)$ il penultimo, per $(1+r)^2$ l'antipenultimo, finchè il primo è moltiplicato per $(1+r)^{n-1}$.

Facendo ora $T_x = l_x \times (1+r)^n$, $T_{x+1} = l_{x+1} \times (1+r)^{n-1}$, ecc., la precedente espressione diviene

$$a_x \times T_x = T_{x+1} + T_{x+2} + T_{x+3} + \ldots.$$

e chiamando Q_{x+1} la somma dei termini del secondo membro, sarà

$$a_x = \frac{Q_{x+1}}{T_x}$$

colla quale formola si potrà calcolare direttamente il valore di a_x (V. tavola V) per tutte le età comprese nella tavola di sopravvivenza. Infatti, ritenendo l'interesse del 4 %, si avrà

per $x = 100$	Q_{x+1}	$= 0 \times (1{,}04)^0$	$= 0{,}000$	Somme
» $= 99$	»	$= 8 \times (1{,}04)$	$= 8{,}320$	8,320
» $= 98$	»	$= 13 \times (1{,}04)^2$	$= 14{,}061$	22,381
» $= 97$	»	$= 21 \times (1{,}04)^3$	$= 23{,}622$	46,003
» $= 96$	»	$= 34 \times (1{,}04)^4$	$= 39{,}776$	85,779
» $= 95$	»	$= 54 \times (1{,}04)^5$	$= 65{,}699$	151,478

ecc.

e dividendo questi valori di Q_{x+1} per T_x, sarà

$$a_{100} = \frac{0{,}000}{8{,}320} = 0{,}000 \qquad a_{97} = \frac{46{,}003}{39{,}776} = 1{,}157$$

$$a_{99} = \frac{8{,}320}{14{,}061} = 0{,}592 \qquad a_{96} = \frac{85{,}779}{65{,}699} = 1{,}306$$

$$a_{98} = \frac{22{,}381}{23{,}622} = 0{,}947 \qquad \text{ecc.}$$

Si possono determinare i valori di a_x in un terzo modo più abbreviato.

Il valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira di un individuo di età x si può considerare eguale a quello di un individuo di età $x+1$ aumentato di 1, cioè a $1 + a_{x+1}$, perchè il primo individuo versa 1 lira più dell'altro.

Ma per rendere eguali le due rendite, bisogna ricondurre la seconda rendita al suo valore attuale, cioè portarla al valore che avea un anno prima, e perciò si avrà

$$\frac{1}{1+r} \times (1 + a_{x+1})$$

Occorre inoltre tenere conto della probabilità che ha l'individuo di età x di morire fra l'età x e l'età $x+1$, e che è rappresentata dalla solita espressione $\frac{l_{x+1}}{l_x}$, per cui il valore della rendita vitalizia in funzione di quella dell'anno successivo, sarà

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x\,(1+r)} \times (1 + a_{x+1})$$

Applicando i soliti dati, avremo

$$a_{99} = \frac{8}{13 \times 1{,}04} \times (1 + 0) = 0{,}592$$

$$a_{98} = \frac{13}{21 \times 1{,}04} \times (1 + 0{,}592) = 0{,}947$$

$$a_{97} = \frac{21}{34 \times 1{,}04} \times (1 + 0{,}947) = 1{,}157$$

ecc.

Vedremo in seguito che questi computi possono essere abbreviati mediante l'uso delle così dette *tavole di commutazione.*

Se si trova il valore reciproco di a_x, ossia si usa l'espressione $1 : a_x$, si otterrà la rendita vitalizia annua posticipata che si potrà avere col pagamento immediato di 1 lira.

Così, un individuo dell'età d'anni 40, pagando subito 1 lira, potrà procurarsi una rendita vitalizia immediata di L. 0,06463 annue posticipate. Infatti, si ha (V. tavola V)

$$1 : 15{,}472 = 0{,}06463$$

come apparisce dalla tavola VII che riporto nella pagina seguente e che dà i valori sopraddetti per le varie età e per i soli maschi.

Problema 1. — Qual capitale (premio unico) dovrà pagare una persona di 50 anni per costituirsi una rendita vitalizia immediata annua posticipata di L. 4000?

Applicando la formola (1) della pag. 24, per mezzo della tavola V si ha $a_x = a_{50} = 12{,}747$, quindi

$$12{,}747 \times 4000 = \text{L. } 50988$$

Problema 2. — Una persona che ha l'età di anni 40 col capitale di L. 30000 quale rendita vitalizia immediata annua può procurarsi?

Dalla tavola V si ha $a_x = a_{40} = 15{,}472$; dunque

$$30000 : 15{,}472 = \text{L. } 1938{,}90$$

Oppure, colla tavola VII

$$0{,}06463 \times 30000 = \text{L. } 1938{,}90$$

VII. - TAVOLA

che dà il valore di $1 : a_x$, ossia la rendita immediata annua posticipata che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira, calcolata in base alla tavola di sopravvivenza della popolazione maschile italiana — interesse 4 %.

Età — Anni	Rendita vitalizia che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira	Età — Anni	Rendita vitalizia che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira	Età — Anni	Rendita vitalizia che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira	Età — Anni	Rendita vitalizia che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira
0	0,06 504	25	0,05 460	50	0,07 845	75	0,22 300
1	05 439	26	05 501	51	08 040	76	23 734
2	05 079	27	05 545	52	08 247	77	25 302
3	04 946	28	05 592	53	08 467	78	27 010
4	04 893	29	05 643	54	08 709	79	28 867
5	0,04 870	30	0,05 697	55	0,08 974	80	0,30 875
6	04 868	31	05 754	56	09 261	81	33 032
7	04 873	32	05 815	57	09 571	82	35 322
8	04 888	33	05 881	58	09 905	83	37 710
9	04 909	34	05 950	59	10 263	84	40 297
10	0,04 934	35	0,06 024	60	0,10 647	85	0,42 947
11	04 962	36	06 103	61	11 052	86	45 711
12	04 994	37	06 186	62	11 488	87	48 524
13	05 028	38	06 274	63	11 961	88	51 291
14	05 065	39	06 366	64	12 474	89	53 952
15	0,05 102	40	0,06 463	65	0,12 035	90	0,56 189
16	05 140	41	06 566	66	13 651	91	58 292
17	05 179	42	06 675	67	14 329	92	60 639
18	05 215	43	06 790	68	15 080	93	63 064
19	05 251	44	06 913	69	15 895	94	65 857
20	0,05 285	45	0,07 043	70	0,16 768	95	0,70 167
21	05 318	46	07 183	71	17 709	96	76 591
22	05 351	47	07 333	72	18 721	97	86 463
23	05 385	48	07 492	73	19 800	98	1,05 55
24	05 421	49	07 663	74	20 990	99	1,69 00

Rendite immediate anticipate. — Sinora si è supposto che la rendita vitalizia immediata sia posticipata, ma se fosse anticipata, cioè pagabile al principio d'ogni anno, il premio da pagarsi sarà eguale a quello che si pagherebbe per la costituzione della rendita postecipata aumentata di una rata della rendita stessa. Perciò, per la rendita di 1 lira, la formola (1) si trasformerà nella seguente

$$a'_x = 1 + a_x \qquad (2)$$

Problema 3. — Una persona di anni 35 vuole costituirsi una rendita vitalizia immediata antecipata di L. 3000. Quale capitale (premio unico) dovrà pagare?

Applicando la formula (2), per mezzo della tavola V si ha $a_x = a_{35} = 16{,}590$, quindi

$$(1 + 16{,}599) \times 3000 = \text{L. } 52797$$

Rendite immediate semestrali, trimestrali, ecc. — Se la rendita vitalizia di 1 lira invece di essere annuale è semestrale, è consuetudine di considerare il valore attuale della rendita vitalizia semestrale, per la parte che viene pagata in fine d'anno come la metà di quella annua, ossia $\frac{1}{2} a_x$, e per la parte che viene pagata dopo 6 mesi come la media fra il valore della rendita vitalizia di mezza lira pagabile in fine d'anno ed il valore di una eguale rendita vitalizia pagabile in principio d'anno, ossia come la media di $\frac{1}{2} a_x$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_x$, cioè

$$\frac{1}{4} a_x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} a_x = \frac{1}{2} a_x + \frac{1}{4}$$

e quindi nella totalità equivalente a

$$\frac{1}{2} a_x + \frac{1}{2} a_x + \frac{1}{4} = a_x + \frac{1}{4} = a_x + 0{,}25$$

ciò che vuol dire che per avere con sufficente approssimazione il valore capitale della rendita vitalizia semestrale di 1 lira, basta aggiungere L. 0,25 al valore della rendita annuale dato dalla tavola.

Con provvedimento analogo si trova che al valore della rendita annuale si deve aggiungere L. 0,375 per avere il valore della rendita vitalizia trimestrale, L. 0,417 per la rendita bimestrale e L. 0,458 per la rendita mensile.

Se poi si tratta di rendite vitalizie anticipate, anzichè posticipate, in tal caso basta aggiungere al valore indicato dalla tavola L. 0,750 per ottenere il valore della rendita vitalizia semestrale anticipata, L. 0,625 per le rendite trimestrali, L. 0,584 per le rendite bimestrali e L. 0,541 per le rendite mensili.

Problema 4. — Si domanda il valore attuale di una rendita vitalizia semestrale posticipata di L. 1500 di una persona di anni 45.

Dalla tavola V si ha $a_x = a_{45} = 14{,}198$, ma questo valore deve essere aumentato di L. 0,25, perciò si avrà

$$(14{,}198 + 0{,}25) \times 1500 = 14{,}448 \times 1500 = \text{L. } 21672$$

od anche

$$14{,}198 \times 1500 + \frac{1500}{4} = \text{L. } 21672$$

b) Tavole di commutazione

Per facilitare il calcolo dei valori attuali di una rendita vitalizia immediata di 1 lira annua posticipata, ossia i valori di $a_x = \frac{Q_x}{l_x}$ (V. pag. 24), si sono costruite delle tavole ausiliarie, dette *tavole di commutazione.*

La tavola VIII che riporto nelle pagine seguenti è calcolata usando la tavola I di sopravvivenza italiana (per i maschi) ed il tasso d'interesse del 4 %.

Nella prima colonna, dopo quella dell'età, di detta tavola, trovasi indicata l'espressione

$$D_x = \frac{l_x}{(1 + r)^x}$$

la quale dà i successivi valori attuali di 1 lira, ossia $\frac{1}{(1 + r)^x}$, all'età x, moltiplicati per i sopravviventi l_x a quella età, e il cui numero si ha dalla tavola di sopravvivenza adottata. (V. pag. 36).

VIII. - TAVOLA DI COMMUTAZIONE ITALIANA

Tavola di sopravvivenza maschile **Tasso d'interesse 4 %**

Età x Anni	$D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$ 2	$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3	Età x Anni	$D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$ 2	$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3
0	100 000	1 537 547	37 017	35	15 235	252 882	4 922,68
1	79 309	1 458 238	20 172,4	36	14 546	238 336	4 819,83
2	70 480	1 387 758	14 393,9	37	13 885	224 451	4 718,61
3	65 407	1 322 351	12 031,8	38	13 251	211 200	4 618,35
4	61 681	1 260 670	10 821,39	39	12 641	198 559	4 517,85
5	58 539	1 202 131	10 052,07	40	12 055	186 504	4 417,660
6	55 800	1 146 331	9 564,44	41	11 491	175 013	4 318.125
7	53 269	1 093 062	9 179,15	42	10 951	164 062	4 219,521
8	50 943	1 042 119	8 902,22	43	10 432	153 630,3	4 121,944
9	48 763	993 356	8 681,60	44	9 933,2	143 697,1	4 024,369
10	46 706	946 650	8 499,87	45	9 455,3	134 241,8	3 928,497
11	44 750	901 900	8 340,73	46	8 996,8	125 245,0	3 833,677
12	42 898	859 002	8 209,57	47	8 556,4	116 688,6	3 739,340
13	41 126	817 876	8 087,05	48	8 133,4	108 555,2	3 645,432
14	39 429	778 447	7 972,13	49	7 726,4	100 828,8	3 551,189
15	37 788	740 659	7 847,76	50	7 334,5	93 494,3	3 456,491
16	36 209	704 450	7 722,28	51	6 957,2	86 537,1	3 361,237
17	34 684	669 766	7 589,83	52	6 592,7	79 944,4	3 264,315
18	33 198	636 568	7 438,28	53	6 240,3	73 704,1	3 165,489
19	31 759	604 809	7 275,95	54	5 904,5	67 799,6	3 069,745
20	30 361	574 448	7 098,88	55	5,583,2	62 216,4	2 975,486
21	29 007	545 441	6 912,80	56	5 273,6	56 942,8	2 880,627
22	27 702	517 739	6 723,77	57	4 974,2	51 968,6	2 784,068
23	26 455	491 284	6 542,00	58	4 683,6	47 285,0	2 684,848
24	25 264	466 020	6 368,38	59	4 401,2	42 883,8	2 582,523
25	24 127	441 893	6 202,94	60	4 126,4	38 757,4	2 477,005
26	23 042	418 851	6 045,69	61	3 857,2	34 900,2	2 366,496
27	22 006	396 845	5 896,21	62	3 596,3	31 303,9	2 253,998
28	21 017	375 828	5 754,13	63	3 344,2	27 959,7	2 140,164
29	20 074	355 754	5 619,45	64	3 100,8	24 858,9	2 025,428
30	19 174	336 580	5 490,88	65	2 866,6	21 992,3	1 910.494
31	18 313	318 267	5 367,85	66	2 641,5	19 350,8	1 785,624
32	17 491	300 776	5 250,13	67	2 425,2	16 925,6	1 680,982
33	16 705	384 071	5 137,20	68	2 217,9	14 707,7	1 566,929
34	15 954	268 117	5 028,36	69	2 017,1	12 690,6	1 451,452

Età x Anni	$D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 2	$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3	Età x Anni	$D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 2	$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3
70	1 822,4	10 868,2	1 334,315	85	114,11	265,700	99,500
71	1 635,1	9 233,1	1 217,115	86	83,352	182,348	73,133
72	1 456,0	7 777,1	1 100,860	87	59,574	122,774	52,561
73	1 285,3	6 491,8	986,222	88	41,623	81,151	36,901
74	1 126,2	5 365,56	876,542	89	28,439	52,712	25,3178
75	978,35	4 387,21	771,977	90	18,963	33,749	16,9355
76	841,54	3 545,67	672,805	91	12,428	21,321	11,1301
77	715,97	2 829,70	579,594	92	8,048	13,273	7,2280
78	601,76	2 227,94	492,925	93	5,133	8,140	4,6224
79	499,07	1 728,87	413,379	94	3,232	4,908	2,9188
80	407,86	1 321,01	341,361	95	2,024	2,884	1,8347
81	328,01	993,00	277,203	96	1,251	1,633	1,1398
82	259,20	733,80	221,007	97	0,757	0,876	0,6944
83	200,94	532,86	172,719	98	0,450	0,426	0,4160
84	153,05	379,81	132,556	99	0,268	0,158	0,2513
				100	0,158	—	0,1523

Così, coll'aiuto della tavola I, si ha

$$D_{100} = \frac{l_{100}}{1{,}04^{100}} = \frac{8}{50{,}5049487} = 0{,}158$$

$$D_{99} = \frac{l_{99}}{1{,}04^{99}} = \frac{13}{48{,}5624502} = 0{,}268$$

$$D_{98} = \frac{l_{98}}{1{,}04^{98}} = \frac{21}{46{,}6946636} = 0{,}450 \qquad \text{ecc.}$$

Nella seconda colonna si hanno i valori di

$$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$$

cioè la somma dei valori di D della prima colonna, non compreso il numero D_x.

Così, esaminando la tavola, si trova

$$N_{100} = 0$$

$$N_{99} = D_{100} = 0{,}158$$

$$N_{98} = D_{99} + D_{100} = 0{,}268 + 0{,}158 = 0{,}426$$

$$N_{97} = D_{98} + D_{99} + D_{100} = 0{,}450 + 0{,}268 + 0{,}158 = 0{,}876 \qquad \text{ecc.}$$

La terza colonna contiene i valori di

$$M_x = \frac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$$

in cui N_{x-1} rappresenta il valore immediatamente superiore a N_x della seconda colonna.

Così, si ha

$$M_{100} = \frac{N_{99}}{1,04} - N_{100} = \frac{0,158}{1,04} - 0 = 0,1523$$

$$M_{99} = \frac{N_{98}}{1,04} - N_{99} = \frac{0,426}{1,04} - 0.158 = 0,2513$$

$$M_{98} = \frac{N_{97}}{1,04} - N_{98} = \frac{0,876}{1,04} - 0,426 = 0,4160 \qquad \text{ecc.}$$

È evidente che con un procedimento analogo si può costruire una tavola di commutazione a qualunque tasso d'interesse e con qualsiasi tavola di sopravvivenza.

Nella pagina seguente riporto anche, perchè molto usata, la tavola IX di commutazione inglese, calcolata in base alla tavola II di sopravvivenza maschile $H^{M.}$

Vediamo ora come una tavola di commutazione possa servire al calcolo delle rendite vitalizie.

Se l' eguaglianza

$$D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x} \qquad (a)$$

è vera per l'età x, sarà vera anche per le età $x+1$, $x+2$, ecc., e perciò si avrà

$$D_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{(1+r)^{x+1}} \qquad (b)$$

$$D_{x+2} = \frac{l_{x+2}}{(1+r)^{x+2}} \qquad (c) \qquad \text{ecc.}$$

e dividendo la *(b)* per la *(a)*, sarà

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{l_{x+1}}{(1+r)^{x+1}} : \frac{l_x}{(1+r)^x} = \frac{l_{x+1}}{(1+r)^{x+1}} \times \frac{(1+r)^x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x\,(1+r)}$$

IX. - TAVOLA DI COMMUTAZIONE INGLESE

Tavola di sopravvivenza maschile H^M **Tasso d'interesse 4 %**

Età x Anni	$D_x = \dfrac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 2	$M_x = \dfrac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3	Età x Anni	$D_x = \dfrac{l_x}{(1+r)^x}$ 1	$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 2	$M_x = \dfrac{N_{x-1}}{1+r} - N_x$ 3
15	54 540,3	1 059 005,0	11 711,6	60	5 595,83	52 931,04	3 344,79
16	52 292,0	1 006 713,0	11 561,1	61	5 220,92	47 710,12	3 185,11
17	50 117,6	956 595,8	11 397,8	62	4 859,28	42 850,85	3 024,27
18	48 002,9	908 593,0	11 210,7	63	4 510,55	38 340,30	2 862,44
19	45 935,4	862 657,6	10 989,5	64	4 174,47	34 165,83	2 699,84
20	43 914,9	818 742,6	10 735,8	65	3 851,71	30 314,12	2 537,64
21	41 958,6	776 784,0	10 468,5	66	3 542,72	26 771,40	2 376,79
22	40 073,5	736 710,5	10 197,2	67	3 247,83	23 523,58	2 218,16
23	38 268,5	698 442,0	9 933,5	68	2 967,11	20 556,47	2 062,36
24	36 547,8	661 894,2	9 684,6	69	2 701,11	17 855,35	1 910,48
25	34 908,7	626 985,5	9 451,3	70	2 448,30	15 407,05	1 761,56
26	33 343,6	593 641,9	9 228,7	71	2 207,73	13 199,32	1 615,15
27	31 846,8	561 795,1	9 014,4	72	1 978,36	11 220,97	1 470,69
28	30 410,5	531 384,7	8 803,0	73	1 759,71	9 461,26	1 328,13
29	29 031,1	502 353,5	8 593,3	74	1 551,83	7 909,43	1 187,93
30	27 707,1	474 646,5	8 385,8	75	1 356,07	6 553,37	1 051,86
31	26 435,7	448 210,8	8 180,0	76	1 175,66	5 377,71	923,60
32	25 217,7	422 993,2	7 978,8	77	1 010,19	4 367,52	803,36
33	24 051,2	398 941,9	7 782,2	78	859,938	3 507,583	691,957
34	22 934,6	376 007,4	7 590,6	79	724,983	2 782,600	590,076
35	21 864,9	354 142,4	7 403,1	80	604,344	2 178,256	497,321
36	20 839,5	333 302,9	7 218,7	81	497,043	1 681,213	413,264
37	19 855,5	313 447,4	7 036,1	82	402,396	1 278,817	337,734
38	18 911,1	294 536,3	6 855,5	83	320,620	958,197	271,435
39	18 005,9	276 530,4	6 677,6	84	250,992	707,205	214,138
40	17 138,9	259 391,5	6 503,1	85	193,342	513,864	166,142
41	16 309,8	243 081,7	6 333,2	86	146,887	366,977	127,123
42	15 518,1	227 563,6	6 168,8	87	110,214	256,763	96,099
43	14 761,1	212 802,5	6 008,61	88	81,4703	175,2928	71,5948
44	14 035,4	198 767,2	5 850,68	89	59,5908	115,7020	52,8488
45	13 339,6	185 427,5	5 694,72	90	42,7910	72,9110	38,3409
46	12 670,2	172 757,4	5 538,34	91	29,6471	43,2639	26,8428
47	12 025,2	160 732,2	5 580,69	92	19,5917	23,672[illegible]	17,9277
48	11 404,3	149 327,9	5 222,25	93	12,2200	11,4522	11,3096
49	10 807,3	138 520,6	5 063,91	94	6,8646	4,5876	6,4242
50	10 233,5	128 287,2	4 905,75	95	3,2521	1,3355	3,0757
51	9 682,92	118 604,20	4 748,80	96	1,1350	0,2005	1,0836
52	9 155,30	109 448,98	4 593,59	97	0,2005	—	0,1927
53	8 648,68	100 800,27	4 439,11				
54	8 161,36	92 638,91	4 284,42				
55	7 692,59	84 946,32	4 129,56				
56	7 241,15	77 705,17	3 973,98				
57	6 806,31	70 898,86	3 817,65				
58	6 387,53	64 511,33	3 660,65				
59	5 984,46	58 526,81	3 503,26				

Allo stesso modo, dividendo la *(c)* per la *(a)*. si ottiene

$$\frac{D_{x+2}}{D_x} = \frac{l_{x+2}}{l_x (1+r)^2}$$

e così di seguito.

Ma siccome il valore attuale della rendita vitalizia di 1 lira è (V. pag. 24)

$$a_x = \frac{Q_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x (1+r)} + \frac{l_{x+2}}{l_x (1+r)^2} + \dots$$

sostituendo si ha

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots$$

ovvero

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots}{D_x}$$

ed essendo

$$D_{x+1} + D_{x+2} + \dots = N_x$$

si avrà

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad (3)$$

Il valore reciproco di a_x, che darà la rendita vitalizia da acquistarsi col pagamento immediato di 1 lira, sarà

$$1 : a_x = 1 : \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x}{N_x} \qquad (3)^{bis}$$

Problema 5. — Si domanda quale capitale dovrà pagare un individuo di 40 anni per acquistare una rendita annua vitalizia di L. 3500.

Colla formola (3) e la tavola VIII di commutazione, si ha

$$N_x = N_{40} = 186504 \; ; \; D_x = D_{40} = 12055$$

per cui

$$a_{40} = \frac{186504}{12055} = 15{,}472$$

come apparisce anche dalla tavola V.

Per la rendita di L. 3500, il capitale sarà

$$15{,}472 \times 3500 = \text{L. } 54152$$

Problema 6. — Col capitale di L. 25000 una persona di 35 anni quale rendita vitalizia annua immediata potrà avere?

Colla solita tavola di commutazione e colla formola $(3)^{bis}$, si avrà

$$D_x = D_{35} = 15235 \;;\; N_x = N_{35} = 252882$$

$$1 : a_{35} = \frac{15235}{252882} = 0{,}06024$$

come da tavola VII.

Col capitale di L. 25000 si potrà acquistare la rendita di

$$0{,}06024 \times 25000 = \text{L. } 1506.$$

c) Rendite vitalizie differite

Rendite vitalizie posticipate. — Abbiamo veduto che la rendita vitalizia è differita, quando s'incomincia a riscuotere dopo trascorso un certo numero d'anni dalla stipulazione del contratto (V. pag. 4).

Il valore attuale di una tale rendita è certamente minore di quello di una rendita vitalizia immediata, poichè chi fa il contratto ha la probabilità di morire prima del tempo di differimento, ossia avanti di esigere la prima quota di rendita.

Se la rendita di 1 lira è esigibile dopo n anni dalla stipulazione del contratto ed è x l'età della persona che comincierà a goderla quando avrà raggiunto l'età $x+n$, le probabilità ch'essa avrà di vivere ancora 1 anno, 2 anni, ecc., saranno

$$\frac{l_{x+n+1}}{l_x} \;,\quad \frac{l_{x+n+2}}{l_x} \;,\; \text{ecc.}$$

ed i valori attuali, o le speranze matematiche, di riscuotere la rendita, saranno

$$\frac{1}{(1+r)^{n+1}} \times \frac{l_{x+n+1}}{l_x} \;,\quad \frac{1}{(1+r)^{n+2}} \times \frac{l_{x+n+2}}{l_x} \;,\; \text{ecc.}$$

per cui, indicando con $_{n|}a_x$ il valore attuale della rendita stessa, sarà

$$_{n|}a_x = \frac{1}{(1+r)^n \times l_x} \times \left\{ \frac{l_{x+n+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+n+2}}{(1+r)^2} + \ldots \right\}$$

ossia (V. pag. 24).

$$_{n|}a_x = \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{Q_{x+n}}{l_x}$$

e poichè per la formola (1)

$$Q_{x+n} = a_{x+n} \times l_{x+n}$$

sostituendo, si avrà

$$_{n|}a_x = \frac{a_{x+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (4)$$

Volendo risolvere la questione inversa, cioè determinare la rendita vitalizia differita di n anni che si può acquistare col pagamento immediato di 1 lira, si farà

$$1 : {}_{n|}a_x = \frac{(1+r)^n}{a_{x+n}} \times \frac{l_x}{l_{x+n}} \qquad (4)^{bis}$$

il quale valore si chiama il *coefficiente di pensione* all' età x e al differimento n.

Le rendite vitalizie differite si possono calcolare più speditomente per mezzo della tavola di commutazione.

Infatti, considerando l' eguaglianza

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x\,(1+r)}$$

che trovasi a pag. 37, per il tempo $x+n$ essa si converte evidentemente nella seguente

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x\,(1+r)^n}$$

e sostituendo questo valore nella formola (4), si avrà

$$_{n|}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \times a_{x+n}$$

ma per la formula (3)

$$a_{x+n} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

quindi

$$_{n|}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \times \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad (5)$$

ed il valore reciproco che dà il coefficiente di pensione, sarà

$$1 : {}_{n|}a_x = \frac{D_x}{N_{x+n}} \qquad (5)^{bis}$$

Problema 7. — Una persona dell'età di anni 30 vuole costituirsi una rendita vitalizia di L. 2000 a partire dall'età di 50 anni. Si domanda quale capitale (premio unico) dovrà sborsare.

Applicando le tavole I e V, si avrà colla formola (4)

$$l_x = l_{30} = 62188 \,;\; l_{x+n} = l_{50} = 52124 \,;\; a_{x+n} = a_{50} = 12{,}747$$

quindi

$$_{n|}a_x = {}_{50|}a_{30} = \frac{12{,}747}{1{,}04^{20}} \times \frac{52124}{62188} = 4{,}876$$

Colla tavola VIII di commutazione e colla formola (5), sarà

$$N_{x+n} = N_{50} = 93494{,}3 \,;\; D_x = D_{30} = 19174$$

quindi

$$_{n|}a_x = {}_{50|}a_{30} = \frac{N_{50}}{D_{30}} = \frac{93494{,}3}{19174} = 4{,}876$$

Per la rendita di L. 2000, si dovrà pagare il premio unico di

$$4{,}876 \times 2000 = \text{L.}9752$$

Problema 8. — Una persona dell'età di anni 45 paga oggi il capitale di L. 20000 per godere una rendita vitalizia a partire dell'età di 60 anni. Si domanda l'importo di tale rendita.

Colle dette tavole I e V e colla formola $(4)^{bis}$, sarà

$$l_x = l_{45} = 55230 \,;\; l_{x+n} = l_{60} = 43408 \,;\; a_{x+n} = a_{60} = 9{,}393$$

quindi

$$1 : {}_{n|}a_x = 1 : {}_{60|}a_{45} = \frac{1{,}04^{15}}{9{,}393} \times \frac{55230}{43408} = 0{,}24395$$

Colla tavola di commutazione e colla formola $(5)^{bis}$, si avrà

$$D_x = D_{45} = 9455{,}3 \,;\; N_{x+n} = N_{60} = 38757{,}4$$

quindi

$$1 : {}_{n}a_{|x} = 1 : {}_{60|}a_{45} = \frac{9455{,}3}{38757{,}4} = 0{,}24395$$

Col capitale di L. 20000, si avrà la rendita di

$$0{,}24395 \times 20000 = \text{L. } 4879$$

Rendite differite anticipate. — Se la rendita vitalizia differita è anticipata, si trova il capitale da pagarsi, diminuendo di un'unità il numero degli anni di differimento e calcolando quindi, invece di una rendita anticipata differita di n anni, una rendita posticipata differita di n-*1* anni,

Problema 9. — Tizio che ha 36 anni vuole procurarsi una rendita vitalizia anticipata di L. 1000 differita di 10 anni. Quale somma deve pagare?

La rendita vitalizia anticipata di L. 1000 differita di 10 anni, è eguale alla rendita vitalizia posticipata di L. 1000 differita di 9 anni. Ora, il valore di tale rendita, da riscuotersi da Tizio, che ha oggi 36 anni, sarà colla formola (4)

$$_{n|}a_x = {}_{9|}a_{36} = \frac{14,198}{1,04^9} \times \frac{55230}{59696} = 6,89758$$

$$6,89758 \times 1000 = \text{L. } 6897,58$$

Rendite differite a premi annui. — Invece di pagare un premio unico, si preferisce generalmente di pagare dei premi annui, i quali poi verranno a cessare all'epoca in cui comincierà il godimento della rendita.

Per trovare il premio annuo, bisogna prima risolvere le questioni relative alle rendite vitalizie temporanee.

d) Rendite vitalizie temporanee

Rendite temporanee posticipate. — Si è già detto che la rendita vitalizia è temporanea, quando è esigibile soltanto per un certo numero d'anni (V. pag. 4).

Per determinare il valore attuale di una tale rendita, basta dedurre dal valore di una rendita vitalizia immediata il valore di una rendita vitalizia differita di un numero d'anni pari a quello per cui la rendita considerata è esigibile.

Per cui, indicando con $|_n a_x$ il valore attuale della rendita temporanea di 1 lira che da una persona di età x deve riscuotersi soltanto per n anni, con a_x quello della rendita immediata e con $_{n|}a_x$ della rendita differita, sarà

$$|_n a_x = a_x - {}_{n|}a_x$$

e sostituendo in luogo di $_{n|}a_x$ il suo valore dato dalla formola (4)

$$|_n a_x = a_x - \frac{a_{x+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (6)$$

Invece, colla tavola di commutazione e le formole (3) e (5), si avrà

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} \quad \text{e} \quad {}_{n|}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

quindi

$$|_n a_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (7)$$

Volendo determinare la rendita vitalizia temporanea che si potrà acquistare col pagamento immediato di 1 lira, si farà

$$1 : |_n a_x = \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} \qquad (7)^{bis}$$

Problema 10. — Una persona di 35 anni vuole costituirsi per 25 anni la rendita vitalizia annua di L. 2400. Qual capitale dovrà sborsare?

Colla formola (6) e le tavole I e V, sarà

$$a_x = a_{35} = 16,599 \quad ; \quad a_{x+n} = a_{60} = 9,393$$

$$l_x = l_{35} = 60118 \quad ; \quad l_{x+n} = l_{60} = 43408$$

quindi

$$|_n a_x = |_{25} a_{35} = 16,599 - \frac{9,393}{1,04^{25}} \times \frac{43408}{60118}$$

$$= 16,599 - 2,544 = 14,055$$

Colla formola (7) e la tavola VIII di commutazione

$N_x = N_{35} = 252882$; $N_{x+n} = N_{60} = 38757,4$; $D_x = D_{35} = 15235$

quindi

$$|_n a_x = |_{25} a_{35} = \frac{252882 - 38757,4}{15235} = 14,055$$

Per la rendita di L. 2400, il capitale sarà

$$14,055 \times 2400 = \text{L. } 33752$$

Problema 11. - Una persona di 30 anni quale rendita vitalizia per anni 20 potrà acquistare col pagamento immediato di L. 10000?

Applicando la formola $(7)^{bis}$ e la tavola VIII di commutazione, si ottiene

$$1 : |_{20} a_{30} = \frac{19174}{336580 - 93494,8} = 0,078885$$

Col capitale di L. 10000 si avrà la rendita di

$$0,078885 \times 10000 = \text{L. } 788,85$$

Rendite temporanee anticipate. — Se la rendita vitalizia temporanea si paga in principio invece che in fine d'anno, il suo valore sarà dato dalla differenza tra quello di una rendita vitalizia immediata pagata anticipatamente, ch'è dato dalla formola (2) della pag. 33, e quello di una stessa rendita di differita di *n-1* anni che si avrà dalla formola (4) della pag. 41.

Sarà dunque

$$|_n a_x = \left\{ 1 + a_x - \frac{a_{x+n-1}}{(1+r)^{n-1}} \times \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \right\} \quad (8)$$

Colla tavola di commutazione, basterà aggiungere l'unità alla formola (7) pel tempo n-1, e si avrà

$$|_n a_x = 1 + \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_x} = \frac{D_x + N_x - N_{x+n-1}}{D_x}$$

Ma, per la costruzione della tavola, essendo $D_x + N_x = N_{x-1}$, sarà

$$|_n a_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x} \quad (9)$$

Problema 12. — Determinare il valore della rendita vitalizia temporanea anticipata di L. 2400 da godersi per 25 anni da una persona avente 35 anni di età.

Coi dati del problema precedente, ed essendo

$$a_{x+n-1} = a_{59} = 9{,}744 \quad ; \quad l_{x+n-1} = l_{59} = 44518$$
$$N_{x-1} = N_{34} = 268117 \quad ; \quad N_{x+n-1} = N_{59} = 42883{,}8$$

si avrà colla formola (8)

$$|_n a_x = |_{25} a_{35} = \left\{ 1 + 16{,}599 - \frac{9{,}744}{1{,}04^{24}} \times \frac{44518}{60118} \right\}$$

$$= 17{,}599 - 2{,}814 = 14{,}785$$

e colla formola (9)

$$|_n a_x = |_{25} a_{35} = \frac{268117 - 42883{,}8}{15235} = 14{,}785$$

Per la rendita di L. 2400, si avrà il valore attuale di

$$14{,}785 \times 2400 = \text{L. } 35484$$

Rendite temporanee differite posticipate. — Se la rendita vitalizia temporanea è anche differita, in tal caso il capitale da pagarsi per costituire la rendita è dato dalla differenza tra i capitali corrispondenti a due rendite vitalizie, cioè una di un numero di anni pari a quelli di differimento e l'altra per un tempo eguale aumentato del numero di anni di durata della rendita.

Problema 13. Determinare il capitale che dovrà pagare una persona di 40 anni per costituirsi una rendita vitalizia limitata di L. 1000 per 15 anni, la cui prima rata sia esigibile fra 10 anni.

Per costituire all'età di 40 anni una rendita vitalizia di L. 1000 differita di 10 anni, si dovrà pagare un capitale che è dato dalla formola (4), ossia (V. tavole I e V)

$$\frac{1000 \times 12,747}{1,04^{10}} \times \frac{52124}{57874} = \text{L. } 7755,84$$

e per costituire alla stessa età un' eguale rendita differita di 25 anni, si dovrà pagare

$$\frac{1000 \times 7,672}{1,04^{25}} \times \frac{36689}{57874} = \text{L. } 1824,43$$

per cui il capitale richiesto dal problema sarà

$$7755,84 - 1824,43 = \text{L. } 5931,41$$

Rendite temporanee differite anticipate. — Se la rendita vitalizia temporanea differita è anche anticipata, il suo valore è sempre dato dalla differenza dei valori di due rendite vitalizie differite anticipate e non temporanee.

Problema 14. — Una persona di 25 anni domanda quale capitale dovrebbe pagare per costituirsi per 20 anni la rendita vitalizia anticipata di L. 3000 differita di 10 anni.

Si può considerare il valore di questa rendita come la differenza dei valori di due rendite vitalizie posticipate di L. 3000 cadauna, la prima differita di 9 anni e la seconda differita di 29 anni.

Il valore della prima è

$$\frac{3000 \times 16,805}{1,04^{9}} \times \frac{60535}{64318} = \text{L. } 33337,55$$

Il valore della seconda è

$$\frac{3000 \times 11,483}{1,04^{29}} \times \frac{49089}{64318} = \text{L. } 8430,66$$

Il capitale da pagarsi da quella persona, sarà

$$33337,55 - 8430,66 = \text{L. } 24906,89.$$

Rendite differite a premi annui. — In generale, il premio annuo di una rendita di 1 lira si ottiene dividendo il capitale costituente la rendita per il valore della stessa pagata anticipatamente, per cui il premio annuo temporaneo P_x di una rendita vitalizia differita di 1 lira si otterrà, dividendo il valore ${}_n|a_x$ della rendita differita, dato dalla formula (4), per il valore $|_n a_x$ della corrispondente rendita temporanea anticipata dato dalla formola (8), quindi sarà

$$P_x = {}_n|a_x : |_n a_x \qquad (10)$$

Volendo applicare la tavola di commutazione, basterà dividere il valore della formola (5) per quello della formola (9), e si otterrà

$$P_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ossia

$$P_x = \frac{N_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \qquad (11)$$

Per avere poi la rendita vitalizia differita di n anni che si può acquistare col pagamento annuo di 1 lira, si farà

$$1 : P_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{N_{x+n}} \qquad (11)\,bis$$

Problema 15. — Determinare il premio annuo da pagarsi da una persona di 30 anni durante 20 anni per ottenere una rendita vitalizia di L. 2000 a partire dall'età di 50 anni.

Dal problema 7 (V. pag. 42) si ha ${}_n|a_x = 4{,}876$, e si avrà il valore di $|_n a_x$ dalla formola (8), essendo colle tavole I e V

$$a_x = a_{30} = 17{,}554 \;;\; a_{x+n-1} = a_{49} = 13{,}050$$

$$l_x = l_{30} = 62188 \;;\; l_{x+n-1} = l_{49} = 52797$$

$$|_n a_x = \left\{ 1 + 17{,}554 - \frac{13{,}050}{1{,}04^{19}} \times \frac{52797}{62188} \right\}$$

$$= 18{,}554 - 5{,}259 = 13{,}295$$

quindi colla formola (10), sarà

$$P_x = 4{,}876 : 13{,}295 = 0{,}366$$

Colla formola VIII di commutazione e colla formola (11), si avrà

$$N_{x+n} = N_{50} = 93494{,}3 \;;\; N_{x-1} = N_{29} = 355754$$

$$N_{x+n-1} = N_{49} = 100828{,}8$$

quindi

$$P_x = \frac{93494{,}3}{355754 - 100828{,}8} = 0{,}366$$

Per la rendita di L. 2000, il premio annuo da pagarsi sarà

$$0{,}366 \times 2000 = \text{L. } 732.$$

Bisogna qui osservare che il premio annuo essendo pagabile anticipatamente e la rendita vitalizia pagabile soltanto alla fine dell'anno in cui il beneficiario entra nel suo godimento, risulterà necessariamente un intervallo di due anni tra il versamento dell'ultimo premio di assicurazione e il pagamento della prima annualità della pensione [1].

Perciò, il capitale o premio unico da pagarsi non sarà più quello di L. 4,876 calcolato per il tempo $x + n$, ma dovrà calcolarsi colla stessa formola (4) per il tempo $x + n - 1$, e si avrà

$$_{n|}a_x = \frac{13,050}{1,04^{19}} \times \frac{52797}{62188} = 5,259$$

ed il premio annuo sarà

$$P_x = 5,259 : 13,295 = 0,395$$

Colla tavola VIII di commutazione, nella formola (11) si dovrà sostituire N_{x+n-1} a N_{x+n} e si otterrà

$$P_x = \frac{N_{x+n-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}$$

quindi

$$P_x = \frac{100828,8}{355754 - 100828,8} = 0,395$$

Per la rendita di L. 2000, il premio annuo da pagarsi sarà

$$0,395 \times 2000 = \text{L. } 790$$

Problema 16. — Col pagamento del premio annuo di L. 1200 fatto da una persona di anni 25 quale rendita vitalizia differita di 15 anni potrebbe acquistare?

Colla tavola VIII di commutazione e colla formula $(11)^{bis}$, si avrà

$$N_{x-1} = N_{24} = 466020 \ ; \ N_{x+n-1} = N_{39} = 198559$$
$$N_{x+n} = N_{40} = 186504$$

quindi

$$1 : P_x = \frac{466020 - 198559}{186504} = 1,434$$

Dunque col premio annuo di L. 1200 da pagarsi per 15 anni quella persona potrebbe acquistare una rendita vitalizia di

$$1,434 \times 1200 = \text{L. } 1720,80$$

a partire dall'età di 40 anni.

---

(1) V. Tito Molinari - Il Congegno matematico delle assicurazioni sulla vita.

e) Assicurazioni di capitale differito

Abbiamo già detto che si ha l'assicurazione di capitale differito, quando l'assicurato paga un premio unico, o dei premi annui, per garantirsi il pagamento di un capitale dopo un certo numero di anni, se sarà ancora in vita (V. pag. 4).

Assicurazioni a premio unico. — Se il capitale di 1 lira deve essere pagato all'assicurato dell'età di anni x quando egli sopravviva n anni, il suo valore attuale sarà $\frac{1}{(1+r)^n}$, ma siccome vi ha la probabilità ch' egli muoia prima, quel valore attuale va moltiplicato per la frazione esprimente la probabilità che l'assicurato viva gli n anni, ossia per $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, essendo l_x il numero dei sopravviventi all'epoca del contratto e l_{x+n} quello dopo n anni.

Adunque, chiamando $A_{\overline{xn}|}^{\,1}$ il premio unico che dovrà pagare subito l'assicurato per 1 lira assicurata, si avrà

$$A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x\,(1+r)^n} \tag{12}$$

Colla tavola di commutazione, siccome (V. pag. 41)

$$\frac{l_{x+n}}{l_x\,(1+r)^n} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

così sarà

$$A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{13}$$

Si avrà invece il capitale da assicurarsi, pagando il premio unico di 1 lira, colla formola

$$1 : A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{D_x}{D_{x+n}} \tag{13bis}$$

Problema 17. — Tizio che ha l'età di 30 anni vuole assicurarsi il capitale di L. 25000 da riscuotersi, se sarà ancora in vita, quando avrà 50 anni. Quale sarà il premio unico che dovrà pagare?

Applicando la formola (12) e la tavola 1, si avrà

$$l_x = l_{30} = 62188 \quad ; \quad l_{x+n} = l_{50} = 52124$$

$$A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{52124}{62188 \times 1{,}04^{20}} = 0{,}382$$

Colla formola VIII di commutazione e colla formola (13), sarà

$$D_x = D_{30} = 19174 \quad ; \quad D_{x+n} = D_{50} = 7334{,}5$$

$$A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{7334{,}5}{19174} = 0{,}382$$

Per la somma di L. 25000, si avrà il premio unico di

$$0{,}382 \times 25000 = \text{L. } 9550.$$

Problema 18. – Col premio unico di L. 5000 quale capitale potrà assicurarsi una persona di 25 anni da riscuotersi, se sarà ancora in vita, quando avrà 60 anni di età?

Colla formola $(13)^{bis}$ e la tavola VIII di commutazione, sarà

$$D_x = D_{25} = 24127 \; ; \; D_{x+n} = D_{60} = 4126{,}4$$

$$1 : A_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{24127}{4126{,}4} = 5{,}845$$

Col premio unico di L. 5000, il capitale da assicurarsi sarà

$$5{,}845 \times 5000 = \text{L. } 29225.$$

Assicurazioni a premi annui. — Se l'assicurato, invece di un solo premio, vuol pagare dei premi annui anticipati, che verranno a cessare colla sua morte, per ottenere il valore del premio annuo $P_{\overline{xn}|}^{\,1}$ basterà dividere quello del premio unico dato dalla formola (12), pel valore della corrispondente rendita temporanea anticipata, ch'è dato dalla formola (8).

Applicando invece la tavola di commutazione, si dovrà dividere rispettivamente i valori delle due formole (13) e (9), e si avrà

$$P_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{D_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ovvero

$$P_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \tag{14}$$

La questione reciproca invece potrà risolversi colla formola

$$1 : P_{\overline{xn}|}^{\,1} = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_{x+n}} \qquad (14)^{bis}$$

Problema 19. — Determinare il premio annuo che dovrà pagare una persona di 30 anni per assicurare un capitale di L. 25000 quando avrà raggiunto l'età di 50 anni.

Colla formola (8) e coi dati del problema 17, si avrà

$$a_x = a_{30} = 17{,}554 \ ; \ a_{x+n-1} = a_{49} = 13{,}050$$

$$P_{\overline{xn}|}^{1} = \frac{0{,}382}{1 + 17{,}554 - \dfrac{13{,}050}{1{,}04^{19}} \times \dfrac{52124}{62188}}$$

$$= 0{,}382 : 13{,}363 = 0{,}029$$

Colla tavola VIII di commutazione e la formola (14), sarà

$$N_{x-1} = N_{29} = 355754 \ ; \ N_{x+n-1} = N_{49} = 100828{,}8$$

$$P_{\overline{xn}|}^{1} = \frac{7334{,}5}{355754 - 100828{,}8} = 0{,}029$$

Per la somma di L. 25000, il premio annuo sarà

$$0{,}029 \times 25000 = \text{L. } 725.$$

Problema 20. —. Col premio annuo di L. 500 quale capitale potrà assicurarsi una persona di 30 anni da riscuotersi, se sarà ancora in vita, quando avrà 50 anni di età?

Colla formola (14)*bis* e coi dati del problema precedente, si otterrà

$$1 : P_{\overline{xn}|}^{1} = \frac{355754 - 100828{,}8}{7334{,}5} = 34{,}626$$

Col premio annno di L. 500, il capitale da assicurarsi sarà

$$34{,}626 \times 500 = \text{L. } 17313.$$

CAPO IV.

Assicurazioni in caso di morte.

Abbiamo veduto che le assicurazioni in caso di morte possono essere sulla vita intera, differite, temporanee, a termine fisso, di sopravvivenza e a vite riunite (V. pag. 4).

a) Assicurazioni sulla vita intera

Nelle assicurazioni sulla vita intera il capitale assicurato deve essere corrisposto agli eredi dell'assicurato dopo la di lui morte, in qualunque tempo avvenga, e possono essere a premio unico, o a premi annui vitalizi o temporanei.

Assicurazioni a premio unico. — Essendo di 1 lira la somma assicurata ed x l'età dell'assicurato, la probabilità che questi ha di sopravvivere 1 anno è $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ e quella di morire è

$$1-\frac{l_{x+1}}{l_x}=\frac{l_x-l_{x+1}}{l_x}$$

per cui il valore attuale di quella somma nel caso che la morte dell'assicurato avvenga nel primo anno, sarà

$$\frac{1}{(1+r)}\times\frac{l_x-l_{x+1}}{l_x}$$

La probabilità che l'assicurato muoia nel secondo anno è il prodotto di due probabilità, cioè di quella che viva durante il primo anno per quella che muoia nel secondo; la prima, come s'è detto, è rappresentata da $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ e la seconda da $1-\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}=\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{l_{x+1}}$. Quindi la probabilità che l'assicurato non muoia durante il primo anno ma muoia nel secondo, è data da

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x}$$

ed il valore attuale della somma assicurata nel caso che la morte dell'assicurato avvenga nel secondo anno, sarà

$$\frac{1}{(1+r)^2} \times \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x}$$

e così per gli anni successivi, dimodochè il totale di questi valori attuali, o speranze matematiche, sarà il premio unico A_x che l'assicurato dovrà pagare subito, ossia sarà

$$A_x = \frac{1}{(1+r)} \times \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{1}{(1+r)^2} \times \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$

da cui

$$A_x = \frac{1}{(1+r)} \times \frac{l_x}{l_x} - \frac{1}{(1+r)} \times \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$+ \frac{1}{(1+x)^2} \times \frac{l_{x+1}}{l_x} - \frac{1}{(1+r)^2} \times \frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots$$

e quindi

$$A_x = \frac{1}{(1+r} + \frac{1}{(1+r)} \times \frac{1}{l_x} \left\{ \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \cdots \right\}$$

$$- \frac{1}{l_x} \left\{ \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \cdots \right\}$$

Ma la quantità fra parentesi moltiplicata per $\frac{1}{l_x}$ rappresenta il valore attuale di una rendita vitalizia immediata di 1 lira e che chiameremo a_x (V. pag. 24), e perciò avremo

$$A_x = \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)} \times a_x - a_x$$

ossia

$$A_x = \frac{1}{(1+r)} (1 + a_x) - a_x = \frac{1 + a_x - a_x - r a_x}{1+r}$$

e finalmente

$$A_x = \frac{1 - r a_x}{1+r} \qquad (15)$$

Volendo risolvere la questione inversa, cioè determinare il capitale che si potrà assicurare in caso di morte mediante il pagamento immediato (premio unico) di 1 lira, basta usare l'espressione

$$1 : A_x = \frac{1 + r}{1 - ra_x} \qquad (15)^{bis}$$

Riporto nelle pagine seguenti le tavole X e XI che dànno i valori di A_x calcolati in base alle tavole di sopravvivenza maschile italiana ed inglese, e la tavola XII che dà i valori di $1 : A_x$ calcolati in base alla prima di dette tavole di sopravvivenza.

Giova ora osservare che la formola (15) vale per il caso che il capitale sia pagato al beneficiario alla fine dell'anno in cui si verifica la morte dell'assicurato, mentre invece si paga appena avvenuto il decesso.

Perciò, se si suppone che tale morte abbia luogo alla metà dell'anno, il capitale sarà anticipato di sei mesi ed avrà un valore maggiore, e di conseguenza anche il premio dovrà essere maggiore, e si otterrà, moltiplicando il premio dato dalla formola (15) per $(1 + r)^{\frac{1}{2}}$. Si avrà così

$$A_x = \frac{1 - ra_x}{1 + r} \times (1 + r)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - ra_x}{(1 + r)^{\frac{1}{2}}}$$

Nella pratica si trascura il denominatore, perchè il suo valore è pressochè eguale all'unità, e si ha la formola

$$A_x = 1 - ra_x \qquad (16)$$

Il premio unico, per il caso che consideriamo, si può calcolare con molta facilità colla tavola VIII di commutazione.

Infatti, l'espressione della terza colonna di detta tavola

$$M_x = \frac{N_{x-1}}{1 + r} - N_x$$

ridotta allo stesso denominatore si trasforma nella seguente

$$M_x = \frac{N_{x-1} - N_x (1 + r)}{1 + r}$$

ed eseguendo il prodotto

$$M_x = \frac{N_{x-1} - N_x - r\, N_x}{1 + r} \qquad (a)$$

X. - TAVOLA

che dà il premio unico A_x ed il premio annuo anticipato P_x da pagarsi per l'assicurazione di 1 lira esigibile in caso di morte, calcolata in base alla tavola di sopravvivenza maschile italiana — interesse 4 %.

Età x anni	Premio unico A_x	Premio annuo P_x	Età x anni	Premio unico A_x	Premio annuo P_x	Età x anni	Premio unico A_x	Premio annuo P_x
0	0,37 017	0,02 261	35	0,32 312	0,01 836	70	0,73 217	0,10 514
1	25 435	01 312	36	33 134	01 906	71	74 435	11 199
2	20 423	00 987	37	33 982	01 980	72	75 608	11 923
3	18 395	00 867	38	34 853	02 058	73	76 727	12 681
4	17 544	00 818	39	35 740	02 139	74	77 829	13 502
5	0,17 172	0,00 797	40	0,36 647	0,02 225	75	0,78 906	0,14 388
6	17 140	00 796	41	37 578	02 315	76	79 949	15 336
7	17 232	00 801	42	38 532	02 411	77	80 952	16 346
8	17 475	00 814	43	39 512	02 512	78	81 914	17 420
9	17 804	00 833	44	40 514	02 620	79	82 830	18 555
10	0,18 199	0,00 856	45	0,41 549	0,02 734	80	0,83 695	0,19 745
11	18 638	00 881	46	42 612	02 856	81	84 510	20 984
12	19 137	00 910	47	43 702	02 986	82	85 267	22 257
13	19 664	00 941	48	44 821	03 124	83	85 955	23 537
14	20 219	00 975	49	45 961	03 271	84	86 610	24 877
15	0,20 768	0,01 008	50	0,47 127	0,03 428	85	0,87 197	0,26 198
16	21 327	01 043	51	48 314	03 595	86	87 738	27 525
17	21 883	01 077	52	49 514	03 772	87	88 227	28 824
18	22 405	01 111	53	50 727	03 960	88	88 656	30 057
19	22 910	01 143	54	51 990	04 165	89	89 027	31 199
20	0,23 382	0,01 174	55	0,53 204	0,04 389	90	0,89 310	0,32 129
21	23 831	01 203	56	54 625	04 630	91	89 557	32 980
22	23 272	01 233	57	55 971	04 889	92	89 811	33 902
23	24 729	01 264	58	57 324	05 166	93	90 053	34 828
24	25 208	01 296	59	58 677	05 462	94	90 311	35 860
25	0,25 710	0,01 331	60	0,60 029	0,05 776	95	0,90 669	0,37 386
26	26 239	01 368	61	61 354	06 106	96	91 126	39 523
27	26 794	01 408	62	62 674	06 458	97	91 698	42 521
28	27 378	01 450	63	63 997	06 837	98	92 500	47 497
29	27 993	01 495	64	65 321	07 244	99	93 873	58 977
30	0,28 637	0,01 543	65	0,66 647	0,07 685			
31	29 311	01 595	66	67 978	08 165			
32	30 016	01 650	67	69 311	08 687			
33	30 752	01 708	68	70 648	09 258			
34	31 518	01 770	69	71 955	09 868			

XI. - TAVOLA

che dà il premio unico anticipato A_x da pagarsi per l'assicurazione di 1 lira esigibile in caso di morte, calcolata in base ai dati della tavola di sopravvivenza maschile inglese H^M — interesse 4 %

Età x anni	Valore attuale di 1 lira esigibile in caso di morte A_x	Età x anni	Valore attuale di 1 lira esigibile in caso di morte A_x	Età x anni	Valore attuale di 1 lira esigibile in caso di morte A_x	Età x anni	Valore attuale di 1 lira esigibile in caso di morte A_x
10	0,189 365	35	0,338 584	60	0,597 730	85	0,859 316
11	192 985	36	346 393	61	610 067	86	865 448
12	197 503	37	354 368	62	622 371	87	871 935
13	202 757	38	362 509	63	634 610	88	878 784
14	208 559	39	370 857	64	646 751	89	886 862
15	0,214 733	40	0,379 434	65	0,658 834	90	0,896 004
16	221 086	41	388 308	66	670 894	91	905 412
17	227 422	42	397 522	67	682 966	92	915 066
18	233 543	43	407 058	68	695 073	93	925 493
19	233 239	44	416 852	69	707 294	94	935 835
20	0,244 468	45	0,426 903	70	0,719 502	95	0,945 745
21	249 497	46	437 116	71	731 589	96	954 746
22	254 463	47	447 451	72	743 390	97	961 539
23	259 574	48	457 921	73	754 746		
24	264 985	49	468 564	74	765 506		
25	0,270 742	50	0,479 383	75	0,775 668		
26	276 777	51	490 431	76	785 606		
27	283 055	52	501 742	77	795 251		
28	289 472	53	513 270	78	804 659		
29	296 002	54	524 964	79	813 917		
30	0,302 658	55	0,536 823	80	0,822 910		
31	309 432	56	548 805	81	831 445		
32	316 396	57	560 899	82	839 307		
33	323 570	58	573 093	83	846 593		
34	330 969	59	585 392	84	853 167		

XII. - TAVOLA

che dà il capitale che si può assicurare in caso di morte mediante il pagamento del premio unico o del premio annuo di 1 lira, calcolata in base alla tavola di sopravvivenza maschile italiana — interesse 4 %.

Età x anni	Capitale che si può assicurare in caso di morte mediante il pagamento del premio unico di 1 lira $1 : A_x$	del premio annuo di 1 lira $1 : P_x$	Età x anni	Capitale che si può assicurare in caso di morte mediante il pagamento del premio unico di 1 lira $1 : A_x$	del premio annuo di 1 lira $1 : P_x$	Età x anni	Capitale che si può assicurare in caso di morte mediante il pagamento del premio unico di 1 lira $1 : A_x$	del premio annuo di 1 lira $1 : P_x$
0	2,7015	44,237	35	3,0949	54,465	70	1,3658	9,5109
1	3,9315	76,220	36	3,0180	52,467	71	1,3434	8,9296
2	4.8964	101,31	37	2,9427	50,510	72	1,3226	8,3873
3	5,4361	115,34	38	2,8691	48.599	73	1,3033	7,5859
4	5,6999	122,20	39	2,7980	46,748	74	1,2849	7,4061
5	5,8236	125,41	40	2,7287	44,947	75	1,2673	6,9504
6	5,8342	125,69	41	2,6612	43,191	76	1,2508	6,5208
7	5,8032	124,88	42	2,5953	41,447	77	1,2353	6,1178
8	5,7224	122,79	43	2,5309	39,802	78	1,2208	5,7406
9	5,6168	120,04	44	2,4683	38,175	79	1,2073	5,3895
10	5,4949	116,87	45	2,4068	36,578	80	1,1948	5,0647
11	5,3654	113,50	46	2,3468	35,016	81	1,1833	4,7655
12	5,2254	109,86	47	2,2882	33,494	82	1,1728	4,4930
13	5,0853	106,22	48	2,2311	32,010	83	1,1634	4,2485
14	4,9458	102,59	49	2,1758	30,569	84	1,1546	4,0199
15	4,8150	99,193	50	2,1219	29,170	85	1,1468	3,8177
16	4,6889	95,911	51	2,0698	27,815	86	1,1398	3,6331
17	4,5698	92,815	52	2,0196	26,510	87	1,1334	3,4693
18	4,4632	90,043	53	1,9713	25,255	88	1,1279	3,3271
19	4,3650	87,490	54	1,9234	24,010	89	1,1233	3,2052
20	4,2768	85,198	55	1,8764	22,786	90	1,1197	3,1124
21	4,1961	83,100	56	1,8308	21,598	91	1,1166	3,0321
22	4.1200	81,122	57	1,7867	20,453	92	1,1134	2,9496
23	4,0439	79,141	58	1,7445	19,356	93	1,1105	2,8712
24	3,9671	77,144	59	1,7042	18,310	94	1,1073	2,7886
25	3,8896	75,129	60	1,6659	17,313	95	1,1029	2,6748
26	3,8112	73,092	61	1,6299	16,378	96	1,0974	2,5301
27	3,7322	71,038	62	1,5955	15,484	97	1,0905	2,3518
28	3,6526	68,967	63	1,5626	14,627	98	1,0811	2,1054
29	3,5723	66,881	64	1,5309	13,804	99	1,0653	1,6956
30	3,4920	64,790	65	1,5004	13,012			
31	3,4117	62,703	66	1,4711	12,248			
32	3,3316	60,621	67	1,4428	11,512			
33	3,2518	58,548	68	1,4155	10,802			
34	3,1728	56,494	69	1,3899	10,133			

Sostituendo ora nella formola (15) il valore di a_x dato dalla formola (3) della pag. 39, si ha

$$A_x = \frac{1 - r\,\dfrac{N_x}{D_x}}{1 + r}$$

e moltiplicando il numeratore ed il denominatore per D_x , si ottiene

$$M_x = \frac{D_x - r\,N_x}{D_x\,(1 + r)} \qquad \text{(b)}$$

Ma essendo i valori di N la somma dei valori di D (V. pag. 36), così sarà

$$D_x = N_{x-1} - N_x$$

e sostituendo questo valore nel numeratore della espressione (b), si ha

$$A_x = \frac{N_{x-1} - N_x - r\,N_x}{D_x\,(1 + r)} = \frac{1}{D_x} \times \frac{N_{x-1} - N_x - r\,N_x}{1 + r}$$

e confrontando il secondo membro di questa eguaglianza coll'espressione (a), si ottiene

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \qquad (17)$$

Per calcolare il capitale da assicurare in caso di morte col pagamento di 1 lira, si farà

$$1 : A_x = \frac{D_x}{M_x} \qquad (17)bis$$

Problema I. — Una persona dell'età di anni 30 vorrebbe assicurare alla sua morte alla moglie il capitale di L. 20000. Chiedesi quale somma, o premio unico, dovrà ora pagare.

Dalla tavola V si ha $a_x = a_{30} = 17{,}554$ e quindi colla formola (15)

$$A_x = \frac{1 - 0{,}04 \times 17{,}554}{1{,}04} = 0{,}2864$$

Colla tavola VIII di commutazione e colla formola (17), si avrà

$$A_x = \frac{5490{,}88}{19174} = 0{,}2864$$

come apparisce anche dalla tavola X.

Per il capitale di L. 20000, sarà

$$0{,}2864 \times 20000 = \text{L. } 5728$$

Colla formola (16) invece si avrebbe

$$A_x = 1 - 0{,}04 \times 17{,}554 = 0{,}2978$$
$$0{,}2978 \times 20000 = \text{L. } 5956,$$

Problema 2. — Una persona dell'età di anni 25 domanda quale capitale potrebbe assicurare in caso di morte mediante il pagamento immediato (premio unico) di L. 2000.

Applicando la tavola V e la formola $(15)^{bis}$, si ha

$$1 : A_{25} = \frac{1,04}{1 - 0,04 \times 18,316} = 3,8896$$

Colla tavola VIII di commutazione e la formola $(17)^{bis}$, sarà

$$1 : A_{25} = \frac{24127}{6202,94} = 3,8896$$

come apparisce anche dalla tavola XII.

Col premio unico di L. 2000, potrà assicurare il capitale di

$$3,8896 \times 2000 = \text{L. } 7779,20$$

Assicurazioni a premi annui vitalizi. — Se invece di un premio unico A_x, l'assicurato dell'età di x anni si obbliga di pagare un premio annuo P_x per tutta la durata della sua vita, questo si può considerare come una rendita vitalizia che l'assicurato paga all'assicuratore sinchè vivrà, e dovendo essa equivalere al premio unico, colla formola (2) della pag. 33 si avrà

$$A_x = P_x (1 + a_x)$$

da cui

$$P_x = \frac{A_x}{1 + a_x}$$

e ponendo in luogo di A_x il valore della formola (15) della pag. 53, sarà

$$P_x = \frac{(1 - r\, a_x)}{(1 + r)\,(1 + a_x)} \qquad (18)$$

Volendo invece determinare il capitale che si potrà avere in caso di morte col premio annuo di 1 lira, si avrà

$$1 : P_x = \frac{(1 + r)\,(1 + a_x)}{(1 - r\, a_x)} \qquad (18)^{bis}$$

Colla tavola di commutazione, essendo $A_x = \frac{M_x}{D_x}$, come dalla formola (17), sarà

$$P_x = \frac{M_x}{D_x\,(1 + a_x)} = \frac{M_x}{D_x + D_x \times a_x}$$

ma, per la rendita di 1 lira, $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ come dalla formola (3) della pag. 39, per cui sostituendo

$$P_x = \frac{M_x}{D_x + D_x \times \frac{N_x}{D_x}} = \frac{M_x}{D_x + N_x}$$

e siccome $D_x = N_{x-1} - N_x$ (V. pag. 45), così sarà

$$P_x' = \frac{M_x}{N_{x-1} - N_x + N_x} = \frac{M_x}{N_{x-1}} \qquad (19)$$

Per risolvere la questione inversa, si avrà

$$1 : P_x = \frac{N_{x-1}}{M_x} \qquad (19)^{bis}$$

Nelle tavole X e XII trovansi i valori di P_x e di $1 : P_x$ calcolati in base alla tavola di sopravvivenza maschile italiana.

Problema 3. — Tizio che ha 35 anni domanda quale premio annuo dovrà pagare per assicurare ai suoi eredi il capitale di L. 25000.

Applicando la formola (18) e la tavola V, si avrà $a_x = a_{35} = 16,599$, quindi

$$P_x = \frac{(1 - 0,04 \times 16,599)}{1,04 \times (1 + 16,599)} = 0,01836$$

Colla tavola VIII di commutazione e colla formola (19), sarà

$$M_x = M_{35} = 4922,68 \;;\; N_{x-1} = N_{34} = 268117$$

perciò

$$P_x = \frac{M_{35}}{N_{34}} = \frac{4922,68}{268117} = 0,01836$$

come apparisce anche dalla tavola X.

Pel capitale di L. 25000 dovrà pagare il premio annuo di

$$0,01836 \times 25000 = \text{L. } 459.$$

Problema 4. — Una persona dell'età di anni 25 domanda quale capitale potrebbe assicurare in caso di morte col pagamento di un premio annuo di L. 500.

Colla formola $(18)^{bis}$ e la tavola V, si avrà $a_x = a_{25} = 18,316$, quindi

$$1 : P_x = \frac{1,04 \times (1 + 18,316)}{(1 - 0,04 \times 18,316)} = 75,129$$

Colla tavola di commutazione e la formola (19)*bis*

$$N_{x-1} = N_{24} = 466020 \; ; \; M_x = M_{25} = 6202{,}94$$

$$1 : P_x = \frac{466020}{6202{,}94} = 75{,}129$$

come apparisce anche dalla tavola XII.

Col premio annuo di L. 500 potrà assicurare il capitale di

$$75{,}129 \times 500 = \text{L. } 37564{,}50.$$

Assicurazioni a premi annui temporanei. — Se l'assicurato dell'età di x anni si obbliga di pagare un premio annuo $P^{1}_{\overline{x\,n|}}$ soltanto per un numero n di anni, allo scopo di assicurare una certa somma da pagarsi alla sua morte, si troverà il premio annuo dividendo il premio unico A_x per l'assicurazione sulla vita intera, dato dalla formola (15), per il valore attuale $|_n a_x$ di una rendita temporanea anticipata di 1 lira per n — 1 anni, ch'è dato dalla formola (8) della pag. 45. Si avrà dunque

$$P^{1}_{\overline{x\,n|}} = A_x : |_n a_x \qquad (20)$$

Colla tavola VIII di commutazione, si avrà dalle formole (17) e (9)

$$P^{1}_{\overline{x\,n|}} = \frac{M_x}{D_x} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ossia

$$P^{1}_{\overline{x\,n|}} = \frac{M_x}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \qquad (21)$$

Problema 5. — Determinare il premio temporaneo che dovrà pagare per 20 anni una persona di 35 anni per assicurare un capitale di L. 10000.

Colla formola (15) e la tavola V, sarà $a_x = a_{35} = 16{,}599$, quindi

$$A_x = \frac{1 - 0{,}04 \times 16{,}599}{1{,}04} = 0{,}323$$

Colla formola (8) e le tavole I e V, si avrà

$$a_{x+n-1} = a_{54} = 11{,}483 \; ; \; l_x = l_{35} = 60118$$

$$l_{x+n-1} = l_{54} = 49089$$

perciò

$$|_n a_x = 1 + 16{,}599 - \frac{11{,}483}{1{,}04^{19}} \times \frac{49089}{60118}$$

$$= 17{,}599 - 4{,}450 = 13{,}149$$

Quindi colla formola (20)

$$P_{\overline{xn}|}^{1} = \frac{0,323}{13,149} = 0,0246$$

Colla tavola VIII di commutazione e la formola (21), si avrà

$$M_x = M_{35} = 4922,68 \quad ; \; N_{x-1} = N_{34} = 268117$$

$$N_{x+n-1} = N_{54} = 67799,6$$

Quindi

$$P_{\overline{xn}|}^{1} = \frac{4922,68}{268117 - 67799,6} = 0,0246$$

Per il capitale di L. 10000, il premio temporaneo sarà

$$0,0246 \times 10000 = \text{L. } 246.$$

b) **Assicurazioni differite**

Ha luogo l'assicurazione differita quando il capitale deve essere pagato nel solo caso che la morte dell'assicurato avvenga dopo un'epoca prestabilita, e può essere a premio unico o a premi annui.

Assicurazioni a premio unico. — Se una persona dell'età di x anni vuole assicurare una somma di 1 lira esigibile dopo n anni, chiamando A_{x+n} il premio unico per un'assicurazione immediata quando l'assicurato abbia raggiunto l'età $x+n$, il valore attuale di detto premio, qualora l'assicurato fosse certo di vivere ancora n anni, sarebbe $\frac{A_{x+n}}{(1+r)^n}$. Ma siccome la probabilità che ha l'assicurato di sopravvivere n anni è $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, così indicando con $A_{|\overline{xn}}^{1}$ il premio unico che l'assicurato dovrà pagare, sarà

$$A_{|\overline{xn}}^{1} = \frac{A_{x+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

e sostituendo a A_{x+n} il suo valore dato dalla formola (15) della pag. 53 per il tempo $x+n$, si avrà

$$A_{|\overline{xn}}^{1} = \frac{1 - ra_{x+n}}{(1+r)} \times \frac{l_{x+n}}{l_x \, (1+r)^n} \tag{22}$$

Colla tavola VIII di commutazione, sostituendo a A_{x+n} e a $\frac{l_{x+n}}{l_x \, (1+r)^n}$ i rispettivi valori dati dalle formole (17) e (13), sarà

$$A_{|\overline{xn}}^{1} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} \times \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x} \tag{23}$$

Problema 6. — Una persona di 30 anni vuole assicurare, nel caso di sua morte, purchè avvenga dopo aver compiuti i 50 anni, il capitale di L. 20000 a sua moglie. Quale premio unico dovrà pagare?

Colle tavole I e V, si avrà

$$a_{x+n} = a_{50} = 12{,}747 \; ; \; l_x = l_{30} = 62188 \; ; \; l_{x+n} = l_{50} = 52124$$

quindi

$$A_{\overline{|xn}}^{\,1} = \frac{1 - 0{,}04 \times 12{,}747}{1{,}04} \times \frac{52124}{62188 \times 1{,}04^{20}}$$

$$= 0{,}47127 \times 0{,}38245 = 0{,}1803$$

Colla tavola VIII di commutazione, sarà

$$M_{x+n} = M_{50} = 3456{,}491 \; ; \; D_x = D_{30} = 19174$$

quindi

$$A_{\overline{|xn}}^{\,1} = \frac{3456{,}491}{19174} = 0{,}1803$$

Per la somma di L. 20000, il premio unico sarà

$$0{,}1803 \times 20000 = \text{L. } 3606.$$

Assicurazioni a premi annui. — Se il premio è annuo, questo si calcola dividendo il premio unico dato dalla formola (22) per il valore di una rendita temporanea anticipata di 1 lira per $n - 1$ anni, ch'è dato dalla formola (8), per cui indicando con $P_{\overline{|xn}}^{\,1}$ il premio annuo, si ha

$$P_{\overline{|xn}}^{\,1} = A_{\overline{|xn}}^{\,1} : |_{n}a_x$$

Colla tavola VIII di commutazione e colle formole (24) e (9), sarà

$$P_{\overline{|xn}}^{\,1} = \frac{M_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ossia

$$P_{\overline{|xn}}^{\,1} = \frac{M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \tag{25}$$

Problema 7. — Determinare il premio annuo nel caso considerato dal problema precedente.

Abbiamo trovato $A_{\overline{|xn}}^{\,1} = 0{,}1803$ e dal problema 19 (V. pag. 50) si ha $|_{n}a_x = 13{,}363$, quindi

$$P_{\overline{|xn}}^{\,1} = 0{,}1803 : 13{,}363 = 0{,}0135$$

Colla tavola di commutazione e coi dati dello stesso problema, sarà

$$P_{\overline{|xn}}^{\;1} = \frac{3456,491}{355754 - 100828,8} = 0,0135$$

Per la somma di L. 20000, il premio annuo sarà

$$0,0135 \times 20000 = \text{L. } 270.$$

c) Assicurazioni temporanee

Si ha l'assicurazione temporanea quando il capitale deve essere pagato alla morte dell'assicurato, qualora essa avvenga entro un dato numero di anni, e può essere a premio unico o a premi annui.

Assicurazioni a premio unico. — Il premio unico $A_{\overline{xn|}}^{1}$ per una assicurazione temporanea di n anni è eguale a quello di una assicurazione per la vita intera, il cui valore è dato dalla formola (15), diminuito di quello per un'assicurazione differita di n anni, il cui valore è dato dalla formola (22). Si ha dunque

$$A_{\overline{xn|}}^{1} = A_x - A_{\overline{|xn}}^{\;1} \qquad (26)$$

Colla tavola VIII di commutazione, facendo la differenza dei valori dati dalle formole (17) e (23), sarà

$$A_{\overline{xn|}}^{1} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad (27)$$

Problema 8. — Determinare il premio unico che dovrà pagare una persona di 50 anni per contrarre un'assicurazione temporanea di 15 anni per una somma di L. 10000.

Colle formole (15) e (22) e le tavole I e V, si avrà

$$a_x = a_{50} = 12,747 \; ; \; a_{x+n} = a_{65} = 7,672$$

$$l_x = l_{50} = 52124 \; ; \; l_{x+n} = l_{65} = 36689$$

$$A_x = \frac{1 - 0,04 \times 12,747}{1,04} = 0,471$$

$$A_{\overline{|xn}}^{\;1} = \frac{1 - 0,04 \times 7,672}{1,04} \times \frac{36689}{52124 \times 1,04^{15}}$$

$$= 0,666 \times 0,391 = 0,260$$

quindi

$$A_{\overline{xn|}}^{1} = 0,471 - 0,260 = 0,211$$

Colla tavola VIII di commutazione, sarà

$$M_x = M_{50} = 3456{,}491 \ ; \ M_{x+n} = M_{65} = 1910{,}494 \ ; \ D_x = D_{50} = 7334{,}5$$

quindi

$$A_{\overset{1}{x\,n|}} = \frac{3456{,}491 - 1910{,}494}{7334{,}5} = 0{,}211$$

Per la somma di L. 10000, il premio unico sarà

$$0{,}211 \times 10000 = \text{L. } 2110$$

Assicurazioni a premi annui. — Se il premio è annuo, si procederà come al solito, cioè dividendo il premio unico dato dalla formola (26) pel valore dato dalla formola (8) della pag. 45, e sarà

$$P_{\overset{1}{x\,n|}} = A_{\overset{1}{x\,n|}} : |_n a_x \tag{28}$$

Applicando la tavola VIII di commutazione si ha colle formole (27) e (9).

$$P_{\overset{1}{x\,n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ossia

$$P_{\overset{1}{x\,n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}} \tag{29}$$

Problema 9. — Determinare il premio annuo che dovrà pagare per un periodo di 15 anni una persona dell'età di 50 anni per assicurarsi la somma di L. 10000.

Dal problema precedente si ha $A_{\overset{1}{x\,n|}} = 0{,}211$, per cui colle formole (8) e (28), si avrà

$$a_x = a_{50} = 12{,}747 \ ; \ a_{x+n-1} = a_{64} = 8{,}017$$

$$l_x = l_{50} = 52124 \ ; \ l_{x+n-1} = l_{64} = 38160$$

quindi

$$P_{\overset{1}{x\,n|}} = \frac{0{,}211}{1 + 12{,}747 - \dfrac{8{,}017}{1{,}04^{14}} \times \dfrac{38160}{52124}}$$

$$= 0{,}211 : 10{,}358 = 0{,}0204$$

Colla tavola VIII di commutazione e colla formola (29), sarà

$$M_x = M_{50} = 3456,491 \; ; \; M_{x+n} = M_{65} = 1910,494$$

$$N_{x-1} = N_{49} = 100828,8 \; ; \; N_{x+n-1} = N_{64} = 24859,9$$

quindi

$$P_{\overset{1}{x\,n|}} = \frac{3456,491 - 1910,494}{100828,8 - 24859,9} = 0,0204$$

Per la somma di L. 10000, il premio annuo sarà

$$0,0204 \times 10000 = \text{L. } 204$$

d) Assicurazioni a termine fisso

Nell'assicurazione a termine fisso il capitale deve essere pagato ad un'epoca determinata all'assicurato, se sarà ancora in vita, oppure ai suoi eredi o ad altra persona designata (V. pag. 5).

Assicurazioni a premio unico. — Nel calcolo del premio unico non ha alcuna influenza la mortalità, perchè il capitale dev'essere pagato in ogni caso entro l'epoca stabilita, ma è necessario però determinarlo per il successivo calcolo del premio annuo.

Chiamando M la somma assicurata per il tempo n e C il premio unico od il valore attuale di detta somma, sarà

$$C = \frac{M}{(1+r)^n} \tag{30}$$

Assicurazioni a premi annui. — Il premio annuo invece, essendo temporaneo, si calcola in modo analogo a quello per le assicurazioni a premi temporanei, cioè colla formola (20) della pag. 61. Per cui, indicando con ${}^{n}_{x}P$ il premio annuo temporaneo, si ha

$${}^{n}_{x}P = C : {}_{|n}a_x \tag{31}$$

Colla tavola VIII di commutazione, basta sostituire in questa formola a C il suo valore dato dalla formola (30), facendo $M = 1$, e a $_{|n} n_x$ il suo valore dato dalla formola (9) della pag. 45. Sarà dunque

$$ {}_x^nP = \frac{1}{(1+r)^n} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x} $$

ossia

$$ {}_x^nP = \frac{D_x}{(1+r)^n \left(N_{x-1} - N_{x+n-1}\right)} \qquad (32) $$

Problema 10. — Una persona di anni 35 contrae un' assicurazione di L. 10000 a termine fisso di 20 anni a favore di una sua figlia neonata. Calcolare il premio annuo che dovrà pagare.

Il premio unico sarebbe

$$ C = \frac{10000}{1.04^{20}} = 4563,87 $$

Col problema 5 (V. pag. 61) abbiamo trovato $_{|n} a_x = 13,149$, quindi sarà

$$ {}_x^nP = 4563,87 : 13,149 = \text{L. } 347,09 $$

Colla tavola VIII di commutazione, avremo colla formola (32)

$$ D_x = D_{35} = 15235 ; \; N_{x-1} = N_{34} = 268117 $$

$$ N_{x+n-1} = N_{54} = 67799,6 $$

quindi

$$ {}_x^nP = \frac{15235}{1,04^{20} \times (268117 - 67799,6)} = \text{L. } 347,09 $$

e) Assicurazioni a vite riunite

Si ha l'assicurazione a vite riunite, o sopra due teste, quando, essendovi due persone assicurate, vi è l'obbligo di pagare il capitale o la rendita alla superstite (V. pag. 5).

Rendite immediate su due teste. — Per le rendite vitalizie su due teste, possono darsi due casi, cioè che il godimento della rendita debba cessare quando si verifica la morte di una qualunque delle due persone assicurate, ovvero che il pagamento della rendita intiera o di parte di essa debba essere continuato anche alla superstite.

Nel primo caso, chiamando con x e y le età delle due persone e con l_x e l_y i rispettivi numeri dei sopravviventi dati dalle tavole di sopravvivenza, le probabilità per l'una e l'altra persona di sopravvivere 1 anno, 2 anni, ecc., saranno

$$\frac{l_{x+1}}{l_x}, \frac{l_{x+2}}{l_x}, \text{ ecc. } ; \frac{l_{y+1}}{l_y}, \frac{l_{y+2}}{l_y}, \text{ ecc.}$$

e le probabilità che avranno le due persone di sopravvivere insieme 1, 2, 3, ecc. anni, saranno altrettante probabilità composte, espresse dai prodotti delle rispettive probabilità semplici, cioè

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{y+1}}{l_y} \quad , \quad \frac{l_{x+2}}{l_x} \times \frac{l_{y+2}}{l_y} \quad , \text{ ecc.}$$

Quindi il valore attuale della prima quota di rendita, supposta eguale a 1 lira, sarà

$$\frac{1}{(1+r)} \times \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{l_{y+1}}{l_y}$$

e quello della seconda quota di rendita

$$\frac{1}{(1+r)^2} \times \frac{l_{x+2}}{l_x} \times \frac{l_{y+2}}{l_y}$$

e così di seguito.

Addizionando i valori attuali delle singole quote di rendita, si avrà il capitale a_{xy} che le due persone dovranno pagare per costituirsi una rendita vitalizia di 1 lira sino a che si verifichi la morte di una di esse, cioè sarà

$$a_{xy} = \frac{1}{l_x \times l_y} \left\{ \frac{l_{x+1} \times l_{y+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2} \times l_{y+2}}{(1+r)^2} + \ldots \right\} \quad (33)$$

Anche per questi casi speciali di rendite vitalizie su due teste si sono costruite delle tavole prontuarie per le varie età delle due persone assicurate.

Problema II. — Determinare il capitale necessario a costituire una rendita vitalizia di L. 2000 per due persone, l'una di 30 e l'altra di 60 anni.

Dalle tavole prontuarie si ha che il capitale per 1 lira di rendita vitalizia su due vite, di 30 e 60 anni, è $a_{xy} = 7,5995$, quindi si avrà

$$7,5995 \times 2000 = \text{L. } 15199$$

Venendo ora al secondo caso, cioè che dopo la morte di una delle due persone assicurate, la rendita vitalizia debba essere pagata alla superstite, osserviamo che la probabilità che ha la prima persona di sopravvivere 1 anno è $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ e la probabilità contraria è $1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$, e che per la seconda persona si ha pure $\frac{l_{y+1}}{l_y}$ e $1 - \frac{l_{y+1}}{l_y}$. Adunque, la probabilità che hanno le due persone di morire, sarà

$$\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \times \left(1 - \frac{l_{y+1}}{l_y}\right)$$

e la probabilità che almeno una rimanga in vita, sarà

$$1 - \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \times \left(1 - \frac{l_{y+1}}{l_y}\right) = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{y+1}}{l_y} - \frac{l_{x+1} \times l_{y+1}}{l_x \times l_y}$$

Nello stesso modo si trova che la probabilità che almeno una delle due persone sopravviva due anni, sarà

$$\frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{y+2}}{l_y} - \frac{l_{x+2} \times l_{y+2}}{l_x \times l_y}$$

e così di seguito.

Ora, i valori attuali corrispondenti ad una rendita vitalizia di 1 lira, saranno dati dai prodotti

$$\frac{1}{(1+r)} \times \left\{ \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{y+1}}{l_y} - \frac{l_{x+1} \times l_{y+1}}{l_x \times l_y} \right\};$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \times \left\{ \frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{y+2}}{l_y} - \frac{l_{x+2} \times l_{y+2}}{l_x \times l_y} \right\} \text{ecc.}$$

ed addizionando i detti valori, si avrà

$$\frac{1}{l_x} \times \left\{ \frac{l_{x+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2}}{(1+r)^2} + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{l_y} \times \left\{ \frac{l_{y+1}}{(1+r)} + \frac{l_{y+2}}{(1+r)^2} + \dots \right\}$$

$$- \frac{1}{l_x \times l_y} \times \left\{ \frac{l_{x+1} \times l_{y+1}}{(1+r)} + \frac{l_{x+2} \times l_{y+2}}{(1+r)^2} + \dots \right\}$$

Facendo infine il primo gruppo eguale a a_x (V. pag. 24), il secondo a a_y ed il terzo a a_{xy}, il valore attuale $a_{\frac{x}{y}}$ di una rendita vitalizia di 1 lira sopra due teste da pagarsi anche alla superstite nel caso che una delle due persone assicurate cessi di vivere, sarà

$$a_{\frac{x}{y}} = a_x + a_y - a_{xy} \tag{34}$$

I valori di a_x e a_y si calcolano facilmente colla tavola V o VI, ed il valore di a_{xy} si ha colla tavola prontuaria che serve per le rendite vitalizie su due teste.

Problema 12. — Determinare il capitale necessario a costituire una rendita vitalizia di L. 2000 su due persone, l'una di 30 e l'altra di 60 anni, col patto che, morendo una di esse, il pagamento della rendita debba continuare alla superstite.

Troviamo il valore attuale della rendita vitalizia immediata di 1 lira da pagarsi alla persona che ha 30 anni. Coll'aiuto della tavola V (V. a pag. 26), si avrà

$$a_x = 17{,}554$$

Allo stesso modo, determiniamo il valore attuale della rendita da pagarsi alla persona di 60 anni, e si avrà

$$a_y = 9{,}393$$

Ed avendo già trovato che il valore attuale della rendita sulle due teste (V. Problema 11) è

$$a_{xy} = 7{,}5995$$

si avrà il valore richiesto dal problema per la rendita di 1 lira

$$a_{\frac{x}{y}} = 17{,}554 + 9{,}393 - 7{,}5995 = 19{,}3475$$

e per la rendita di L. 2000

$$19{,}3475 \times 2000 = \text{L. } 38695$$

Può darsi che il diritto di riscuotere la rendita vitalizia, in caso di sopravvivenza, spetti ad una e non all'altra delle due persone assicurate, ed allora il capitale da pagarsi sarà quello che dovrebbe pagare la persona privilegiata per avere la rendita vitalizia immediata, senza tenere calcolo alcuno dell'età dell'altra persona.

Può anche essere stabilito che la rendita vitalizia non debba essere pagata durante gli anni di vita di entrambe le persone assicurate, ma debba essere pagata alla sola persona superstite. In tal caso, basta dedurre dal capitale corrispondente alla rendita vitalizia immediata da pagarsi alla persona superstite quello corrispondente alla rendita vitalizia su due teste, e quindi, usando dei simboli suindicati, si avrà

$$a_{\frac{x}{y}} = a_x - a_{xy} \quad \text{oppure} \quad a_{\frac{x}{y}} = a_y - a_{xy} \tag{35}$$

secondo che è superstite la prima o la seconda persona.

Problema 13. — Determinare il capitale che deve ora pagare una persona di 60 anni perchè alla sua morte venga corrisposta una rendita vitalizia di L. 2000 ad un'altra persona che ha attualmente l'età di 30 anni.

Coi dati del problema precedente, il capitale per la rendita di 1 lira che dovrà ora pagare la persona di 60 anni a favore di quella di 30, sarà

$$a_{\frac{x}{y}} = 17{,}554 - 7{,}5995 = 9{,}9545$$

e per la rendita di L. 2000

$$9{,}9545 \times 2000 = \text{L. } 19909$$

Se invece il contratto è fatto dalla persona di 30 anni a favore di quella di 60 anni, il capitale da pagarsi sarà

$$a_{\frac{x}{y}} = 9{,}393 - 7{,}5995 = 1{,}7935$$

$$1{,}7935 \times 2000 = \text{L. } 3587.$$

Qualora venga pattuito che alla persona superstite sia corrisposta non la rendita vitalizia intiera, ma soltanto una parte di essa, può darsi che tale diritto spetti soltanto alla prima persona, o soltanto alla seconda, in caso di sopravvivenza, ovvero alla sopravvivente, qualunque essa sia.

Nel primo caso, il contratto si può considerare composto di due contratti, cioè di un contratto per la parte di rendita che spetta alla prima o alla seconda persona, in caso di sopravvivenza, e di un contratto su due vite per la parte rimanente della rendita.

Nel secondo caso, si hanno pure due contratti, cioè: un contratto su due vite per la prima porzione della rendita, essendo stabilito però che tale rendita debba essere pagata per intiero alla persona superstite; un contratto su due vite per la rendita rimanente, col patto però che tale rendita non sarà più corrisposta dopo avvenuta la morte di una delle due persone.

Problema 14. — Determinare il capitale necessario a costituire una rendita vitalizia di L. 3000 su due persone, l'una di 30 e l'altra di 60 anni, col patto che, morendo una di esse, la superstite riceva soltanto L. 2000.

Se la rendita di L. 2000 è solo a vantaggio della prima persona, nel caso che sia superstite, coi dati del Problema 12 il capitale corrispondente alla rendita di 1 lira sarà $a_x = 17{,}554$ e per L. 2000 di rendita

$$17{,}554 \times 2000 = \text{L. } 35108$$

e quello su due teste sarà $a_{xy} = 7{,}5995$ e per la rendita di L. 1000

$$7{,}5995 \times 1000 = \text{L. } 7599{,}50$$

quindi

$$35108 + 7599{,}50 = \text{L. } 42707{,}50$$

Se invece la rendita di L. 2000 è solo a vantaggio della seconda persona, in caso di sopravvivenza, si avrà

$$9{,}393 \times 2000 = \text{L. } 18786$$

$$7{,}5995 \times 1000 = \text{L. } 7599{,}50$$

quindi

$$18786 + 7599{,}50 = \text{L. } 26385{,}50$$

Se infine il diritto di ricevere la rendita di L. 2000 spetta alla persona superstite, qualunque essa sia, si ha che il capitale corrispondente alla detta rendita su due vite, da pagarsi anche nel caso della morte di una di esse, sarà

$$2000 \times (17{,}554 + 9{,}393 - 7{,}5995) = \text{L. } 38695$$

ed essendo $7{,}5995 \times 1000 = \text{L. } 7599{,}50$ il capitale corrispondente alla rendita vitalizia su due vite di L. 1000, da pagarsi solo per il tempo in cui le due persone saranno ambedue vive, si avrà che il capitale richiesto dal problema sarà

$$38695 + 7599{,}50 = \text{L. } 46294{,}50$$

Rendite differite su due teste. — Consideriamo ora il caso che la rendita vitalizia su due vite dell'età di x e y anni sia differita di n anni, supposto che il pagamento della rendita cessi colla morte dell'una o dell'altra persona assicurata.

La probabilità che ha la persona di età x di raggiungere l'età $x+n$ è $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, quella della persona di età y di raggiungere l'età $y+n$ è $\frac{l_{y+n}}{l_y}$, e la probabilità che hanno le due persone di raggiungere l'età n è $\frac{l_{x+n}}{l_x} \times \frac{l_{y+n}}{l_y}$.

Chiamando a_{xy} il capitale che dovrebbero pagare le due persone dopo n anni, il valore attuale $_{n|}a_{xy}$ di detto capitale per 1 lira di rendita, sarà

$$_{n|}a_{xy} = \frac{a_{xy}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \times \frac{l_{y+n}}{l_y} \qquad (36)$$

Problema 15. — Si domanda il capitale necessario a costituire una rendita vitalizia di L. 2000 differita di 10 anni su due persone, l'una di 20 e l'altra di 50 anni, col patto che il pagamento della rendita cessi alla morte di una qualunque delle due persone assicurate.

Se il capitale, invece di pagarsi subito, sarà pagato fra 10 anni, cioè quando la prima persona avrà 30 anni e la seconda 60, esso sarà eguale per 1 lira di rendita a 7,5995 (V. Problema 11).

Ora, la probabilità che ha la persona di 20 anni di raggiungere l'età di 30 anni è (V. tavola I) $\frac{62188}{66524}$ e quella della persona di 50 anni di raggiungere l'età di 60 anni è $\frac{43408}{52124}$, quindi la probabilità che fra 10 anni siano vive ambedue le persone sarà

$$\frac{62188}{66524} \times \frac{43408}{52124}$$

ed il capitale che dovranno ora pagare le due persone sarà

$$_{n|}a_{xy} = \frac{7,5995}{1,04^{10}} \times \frac{62188}{66524} \times \frac{43408}{52124} = 3,998564$$

e per la rendita di L. 2000

$$3,998564 \times 2000 = \text{L. } 7997,13$$

Se invece è stabilito che il pagamento della rendita non cessi alla morte di una delle due persone assicurate, ma debba essere continuato per intiero a favore dell'altra, in tal caso il capitale a pagarsi sarà eguale al capitale corrispondente ad una rendita vitalizia differita di n anni a favore della persona che ha x anni, il quale è dato dalla formola (4) (V. pag. 41)

$$\frac{a_{x+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

aumentato del capitale corrispondente ad una rendita vitalizia differita di n anni a favore della persona che ha y anni, il quale è dato da

$$\frac{a_{y+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

e diminuito del capitale corrispondente alla rendita vitalizia da pagarsi nel tempo in cui saranno vive le due persone, il qual capitale è dato da

$$\frac{a_{x+n\,.\,y+n}}{(1+r)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \times \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

Problema 16. — Determinare il capitale necessario a costituire una rendita vitalizia di L. 2000 differita di 10 anni su due persone, l'una di 20 e l'altra di 50 anni, col patto che, morendo una di esse, il pagamento della rendita debba continuare per intiero alla superstite.

Il capitale corrispondente alla rendita vitalizia di L. 2000 differita di 10 anni a favore della persona che ha ora 20 anni è (V. tavola V)

$$\frac{2000 \times 17{,}554}{1{,}04^{10}} \times \frac{62188}{66524} = \text{L. } 22176{,}06$$

Il capitale corrispondente alla rendita vitalizia di L. 2000 differita di 10 anni a favore della persona che ha ora 50 anni è

$$\frac{2000 \times 9{,}393}{1{,}04^{10}} \times \frac{43408}{52124} = \text{L. } 10559{,}04$$

Il capitale corrispondente alla rendita vitalizia di L. 2000 sulle due vite, differita di 10 anni, è (V. Problema 15)

$$\frac{2000 \times 7{,}5995}{1{,}04^{10}} \times \frac{62188}{66524} \times \frac{43408}{52124} = \text{L. } 7997{,}13$$

Quindi il capitale che le due persone dovranno pagare, sarà

$$22176{,}06 + 10559{,}04 - 7997{,}13 = \text{L. } 24737{,}97$$

CAPO V.

Assicurazioni miste.

Si ha l'assicurazione mista, quando il capitale deve essere corrisposto allo stesso assicurato, nel caso che raggiunga una certa età, od ai suoi eredi, in caso di sua morte (V. pag. 5).

Assicurazioni a premio unico. — Siccome l'assicurazione mista si compone di un'assicurazione temporanea in caso di morte e di un'assicurazione di capitale differito in caso di vita, così per avere il valore del premio unico basta addizionare i valori dati dalle formole (26) e (12), e cioè, indicando con $A_{\overline{xn}|}$ il premio unico, sarà

$$A_{\overline{xn}} = \left\{ \frac{(1 - ra_x)}{(1 + r)} - \frac{(1 - ra_{x+n})}{(1 + r)} \times \frac{l_{x+n}}{l_x (1 + r)^n} + \frac{l_{x+n}}{l_x (1 + r)^n} \right\} \quad (37)$$

Colla tavola VIII di commutazione, addizionando i valori delle formole (27) e (13), si avrà

$$A_{\overline{xn}|} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad (38)$$

Problema. — Tizio che ha l'età di 30 anni vuole assicurata la somma di L. 25000 che sarà pagata ai suoi eredi, se morrà prima di avere raggiunto i 50 anni, o verrà pagata a lui medesimo, se a quell'età sarà ancora in vita. Calcolare il premio unico che dovrà pagare all'assicuratore.

Applicando la formola (37) e le tavole I e V, sarà

$$l_x = l_{30} = 62188\,; \; l_{x+n} = l_{50} = 52124$$

$$a_x = a_{30} = 17{,}554\,; \; a_{x+n} = a_{50} = 12{,}747$$

$$\frac{(1 - ra_x)}{(1 + r)} = \frac{1 - 0{,}04 \times 17{,}554}{1{,}04} = 0{,}2863$$

$$\frac{(1 - ra_{x+n})}{(1 + r)} \times \frac{l_{x+n}}{l_x (1+r)^n} = \frac{1 - 0{,}04 \times 12{,}747}{1{,}04} \times \frac{52124}{62188 \times 1{,}04^{20}} = 0{,}1801$$

$$\frac{l_{x+n}}{l_x (1+r)^n} = \frac{52124}{62188 \times 1{,}04^{20}} = 0{,}3824$$

quindi

$$A_{\overline{xn|}} = (0{,}2863 - 0{,}1801 + 0{,}3824) = 0{,}4886$$

Colla tavola VIII di commutazione e la formola (38), si avrà

$$D_x = D_{30} = 19174 ; \; D_{x+n} = D_{50} = 7334{,}5$$

$$M_x = M_{30} = 5490{,}88 \; ; \; M_{x+n} = M_{50} = 3456{,}491$$

$$A_{\overline{xn|}} = \frac{7334{,}5 + 5490{,}88 - 3456{,}491}{19174} = 0{,}4886$$

Per la somma di L. 25000, il premio unico sarà

$$0{,}4886 \times 25000 = \text{L. } 12215.$$

Nelle assicurazioni miste il premio unico è anche dato dalla somma assicurata, diminuita dell'annualità vitalizia temporanea fino alla scadenza dell'assicurazione, moltiplicata per la tassa d'interesse. Se poi la somma assicurata si suppone pagabile alla fine dell'anno in cui avviene il decesso ed il premio unico viene pagato anticipatamente, si dovrà impiegare una annualità immediatamente inferiore e dividere la detta differenza per $(1 + r)$ per ricondurla al suo valore attuale.

Adunque se la somma assicurata è eguale ad 1 lira e se $|_n a_x$ è l'annualità temporanea, sarà

$$\frac{1 - |_n a_x r}{(1 + r)}$$

e sostituendo a $|_n a_x$ il suo valore dato dalla formola (6) della pag. 43 per il tempo $x + n - 1$, si avrà

$$A_{\overline{xn|}} = 1 - r \left\{ a_x - \frac{a_{x+n-1}}{(1+r)^{n-1}} \times \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \right\} : (1 + r) \qquad (39)$$

Colla tavola VIII di commutazione e la formola (7), sarà

$$A_{\overline{xn|}} = 1 - r \times \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_x} : (1+r) = \frac{D_x - r(N_x - N_{x+n-1})}{D_x (1 + r)} \quad (40)$$

Applicando queste due formole al problema precedente, avremo colla (39)

$$a_{x+n-1} = a_{49} = 13{,}050 \quad ; \quad l_{x+n-1} = l_{49} = 52797$$

$$A_{\overline{xn|}} = 1 - 0{,}04 \times \left\{ 17{,}554 - \frac{13{,}050}{1{,}04^{\,19}} \times \frac{52797}{62188} \right\} : 1{,}04$$

$$= (1 - 0{,}4918) : 1{,}04 = 0{,}4886$$

e colla formola (40)

$$N_x = N_{30} = 336580 \quad ; \quad N_{x+n-1} = N_{49} = 100828{,}8$$

$$A_{\overline{xn|}} = \frac{19174 - 0{,}04\,(336580 - 100828{,}8)}{19174 \times 1{,}04}$$

$$= 9743{,}95 : 19940{,}96 = 0{,}4886$$

Assicurazioni a premi annui. — Se il premio è annuo, questo si calcola nello stesso modo indicato pel premio annuo nelle assicurazioni temporanee (V. pag. 65), cioè per mezzo della formola (8) della pag. 45. Così, indicando con $P_{\overline{xn|}}$ il premio annuo, si ha

$$P_{\overline{xn|}} = \frac{0{,}4886}{1 + 17{,}554 - \frac{13{,}050}{1{,}04^{19}} \times \frac{52797}{62188}}$$

$$= 0{,}4886 : 13{,}295 = 0,\ 03675$$

Colla tavola di commutazione, basta nella formola (28) della pag. 65 sostituire a $A^{\;1}_{\overline{xn|}}$ il valore dato dalla formola (40) e a $|_n a_x$ quello della formola (9), e si ottiene

$$P_{\overline{xn|}} = \frac{D_x - r\,(N_x - N_{x+n-1})}{D_x\;(1+r)} : \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

ossia

$$P_{\overline{xn|}} = \frac{D_x - r\,(N_x - N_{x+n-1})}{(1+r)\,(N_{x-1} - N_{x+n-1})} \tag{41}$$

Applicando al problema predetto, si ha

$$P_{\overline{xn|}} = \frac{19174 - 0{,}04\,(336580 - 100828{,}8)}{1{,}04\,(355754 - 100828{,}8)}$$

$$= 9743{,}95 : 265122{,}21 = 0{,}03675$$

Per la somma di L. 25000, il premio annuo sarà

$$0{,}03675 \times 25000 = \text{L. } 918{,}75$$

CAPO VI.

Tontine.

Le *tontine* sono associazioni di previdenza, le quali hanno lo scopo di ripartire dopo un certo tempo fra i soci superstiti della stessa età i capitali da essi versati, o una volta tanto, o annualmente, in unione ai loro interessi composti.

In queste associazioni possono darsi due casi: 1.° che tutti i soci si inscrivano nello stesso tempo; 2.° che alcuni soci si inscrivano dopo la costituzione della società.

Nel primo caso, indicando con l_x il numero dei soci aventi tutti la stessa età x e con n la durata della tontina, è evidente che per ogni lira versata il capitale da ripartire sarà $(1 + r)^n$ Ma al termine della tontina, cioè dopo il tempo $x + n$, non tutti i soci saranno vivi, per cui indicando con l_{x+n} il numero dei superstiti e con a la quota versata da un socio, la somma C che gli toccherà, qualora soppravviva alla liquidazione della tontina, sarà

$$C = a \times (1 + r)^n \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (42)$$

Problema I. — Una tontina della durata di 20 anni è costituita da 250 persone aventi tutte l'età di 30 anni, ciascuna delle quali ha fatto un unico versamento di L. 5000. Quanto spetterà ad ogni superstite nella ripartizione? Interesse 4 %.

Dalla tavola I della pagina 11, si ha:

$$l_x = l_{30} = 62188 \;;\; l_{x+n} = l_{50} = 52124$$

quindi

$$C = 5000 \times 1{,}04^{20} \times \frac{62188}{52124} = \text{L. } 13071.04$$

Se un socio si inscrive dopo la costituzione della società, la somma che dovrà pagare per godere gli stessi diritti degli altri nella ripartizione sarà eguale a quella che gli toccherebbe se si fosse inscritto all'inizio e la tontina si liquidasse al momento in cui realmente si inscrive. Per cui, indicando con t il tempo dopo il quale il socio entra a far parte della tontina, e con P la somma che dovrà versare, sarà

$$P = a \times (1 + r)^t \times \frac{l_x}{l_{x+t}} \tag{43}$$

Problema 2. — Una persona entra a far parte della tontina, di cui al problema precedente, cinque anni dopo la sua costituzione. Quanto dovrà versare per ottenere nella ripartizione la stessa quota degli altri? Interesse 4 %.

Colla stessa tavola, si avrà $l_{x+t} = l_{35} = 60118$, quindi

$$P = 5000 \times 1{,}04^5 \times \frac{62188}{60118} = \text{L. } 6292{,}53$$

Se invece il nuovo socio entra nella società dopo un tempo t con una somma qualsiasi Q, egli si trova nelle stesse condizioni di un altro socio che al principio della tontina abbia versato il capitale

$$Q : (1 + r)^t \times \frac{l_x}{l_{x+t}}$$

e perciò nel caso che sopravviva gli toccherà lo somma

$$C = Q \times (1 + r)^n \times \frac{l_x}{l_{x+n}} : (1 + r)^t \times \frac{l_x}{l_{x+t}}$$

ossia

$$C = Q \times (1 + r)^{n-t} \times \frac{l_{x+t}}{l_{x+n}} \tag{44}$$

Problema 3. — Una persona entra a far parte della tontina, di cui al primo problema, cinque anni dopo la sua costituzione, pagando la somma di L. 2500. Quanto toccherà a quella persona al momento della liquidazione? Interesse 4 %.

Coi dati già trovati, si ha

$$C = 2500 \times 1{,}04^{15} \times \frac{60118}{52124} = \text{L. } 5192{,}72$$

Se i soci, invece di versare una sola quota, preferiscono di pagare delle quote annue, si troverà il loro valore, dividendo la quota unica pel valore di una rendita vitalizia temporanea anticipata di 1 lira ch'è dato dalla formola 8 della pag. 45.

Così, per il caso considerato dal Problema 1, si avrà colle tav. I e V

$$a_x = a_{30} = 17,554 \quad ; \quad a_{x+n-1} = a_{49} = 13,050$$

$$l_x = l_{30} = 62188 \quad ; \quad l_{x+n-1} = l_{49} = 52797$$

e quindi la quota annua sarà

$$5000 : 1 + 17,554 - \frac{13.050}{1,04^{19}} \times \frac{52797}{62188}$$

$$= 5000 : 13,295 = \text{L. } 376,75.$$

CAPO VII.

Riserva matematica.

Quando si stipula un contratto d'assicurazione sulla vita, viene determinato un premio puro che rappresenta la perfetta eguaglianza di oneri tra l'assicuratore e l'assicurato. Ma col procedere degli anni, l'obbligo dell'assicuratore aumenta, approssimandosi l'epoca del pagamento delle somme assicurate, mentre quello dell'assicurato cessa all'atto del contratto col pagamento del premio unico, ed invece, diminuisce, nel caso di premi annui, perchè annualmente diminuisce il numero dei premi che restano ancora da pagare.

Da ciò si deduce che in corrispondenza ai rischi progressivamente maggiori dell'assicuratore, dovrebbero essere sempre crescenti i premi da pagare dall'assicurato, ma in pratica ciò non avviene, perchè l'assicurato paga un premio unico o un premio annuo costante.

Ora, la *riserva matematica* o *riserva dei premi*, è la differenza tra il valore attuale degli impegni assunti dall'assicuratore, ossia delle somme assicurate, ed il valore attuale degli impegni dell'assicurato, ossia dei premi che questi deve ancora presumibilmente pagare. Naturalmente il primo valore eccede il secondo, per le ragioni sopradette.

In altri termini, la riserva è la differenza tra i premi costanti che l'assicurato paga realmente e quelli via via crescenti che dovrebbe pagare, e serve a stabilire la necessaria corrispondenza tra il valore degli indennizzi promessi e quello dei premi che rimangono ancora da esigere.

La riserva matematica non ha un valore fisso per la stessa forma d'assicurazione, ma evidentemente dipende dall'età che ha l'assicurato all'epoca in cui si vuole calcolarla, come pure dal tasso d'interesse e dalla tavola di sopravvivenza prescelta ([1]).

a) **Riserva del premio unico**

Consideriamo il caso di un'assicurazione sulla vita intera. Abbiamo veduto che col procedere del tempo l'impegno dell'assicuratore va aumentando, mentre in qualunque epoca del contratto l'assicurato, avendo già pagato sino dall'inizio il premio unico, non ha alcun altro impegno verso l'assicuratore. Perciò, la riserva matematica avrà per valore il premio unico corrispondente all'età dell'assicurato, nel momento in cui la riserva dev'essere determinata.

Supponiamo che 57874 persone dell'età di 40 anni (V. la tavola I di sopravvivenza) abbiano contratto un'assicurazione sulla vita intera per il capitale di 1 lira pagando il premio unico puro di L. 0,366; l'assicuratore avrà incassato

$$\text{L. } 0{,}366 \times 57874 = \text{L. } 21181{,}88$$

Alla fine del primo anno gli assicurati sono ridotti a 57377, essendone morti 497, e così, mentre l'assicuratore avrà dovuto pagare L. 497 per somme assicurate, avrà goduto gli interessi di un anno su L. 21181,88, supposto che il premio d'assicurazione sia stato pagato anticipatamente e che le somme assicurate siano pagate alla fine dell'anno in cui ebbe luogo il decesso ([2]).

Si avrà dunque

Premi incassati al principio dell'anno	L.	21181,88
Interessi 4 $^0/_0$ per un anno	»	847,28
Totale incassi	L.	22029,16
Somme assicurate pagate		497.—
Riserva alla fine dell'anno	L.	21532,16

([1]) Alla riserva matematica si aggiunge talvolta la *riserva di garanzia* per garantirsi delle alee derivanti dalle inevitabili oscillazioni del saggio d'interesse nei futuri investimenti dei capitali e della effettiva eliminazione complessiva della classe degli assicurati rispetto agli elementi che si sono assunti nel calcolo dei coefficienti di mortalità.

Così, la legge sul Monte-pensioni dei maestri elementari stabilisce la misura della riserva di garanzia nel limite di $^1/_{10}$ della riserva matematica.

([2]) Tito Molinari, opera citata.

e quindi la riserva per ciascuno degli 57377 sopravviventi, sarà

$$21532{,}16 : 57377 = \text{L. } 0{,}375$$

ch'è poi il valore del premio unico all'età di 41 anni. Infatti, applicando la formola (15) della pag. 53 e la tavola V, si ha $a_x = a_{41} = 15{,}230$, e

$$A_x = \frac{1 - 0{,}04 \times 15{,}230}{1{,}04} = \text{L. } 0{,}375$$

In generale, se una persona dell'età x ha contratto una assicurazione sulla vita intera e si vuole determinare la riserva matematica dopo n anni, si osservi che dopo trascorso questo tempo, avendo l'assicurato l'età di $x+n$ anni, e mediante il pagamento del premio unico essendosi liberato da ogni obbligo, l'assicuratore avrà verso di lui un impegno corrispondente al premio unico di un'età di anni $x+n$, e che sarà poi la riserva matematica ricercata.

Indicando quindi con R_x^n la riserva matematica del premio unico, colla formola (15) e per il tempo $x+n$, si avrà

$$R_x^n = \frac{1 - r\; a_{x+n}}{1+r} \tag{45}$$

Analogamente, per mezzo della tavola di commutazione, si otterrà colla formola (17) della pag. 58

$$R_x^n = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} \tag{46}$$

Problema I. — Determinare la riserva matematica dopo 10 anni sopra un contratto stipulato da una persona dell'età di anni 40 per assicurare il capitale di L. 10000 verso il pagamento del premio unico puro di L. 3660.

Con la formola (45) e la tavola V, si ha $a_{x+n} = a_{50} = 12{,}747$, perciò

$$R_{40}^{10} = \frac{1 - 0{,}04 \times 12{,}747}{1{,}04} = 0{,}47127$$

Oppure, colla formola (46) e la tavola VIII di commutazione, si ha $M_{x+n} = M_{50} = 3456{,}491$ e $D_{x+n} = D_{50} = 7334{,}5$; quindi

$$R^{10}_{40} = \frac{3456,491}{7334,5} = 0,47127$$

Per il capitale di L. 25000, la riserva sarà

$$R^{10}_{40} = 0,47127 \times 10000 = \text{L. } 4712,70$$

la quale riserva evidentemente non è altro che il premio unico sopra il contratto di una persona di 50 anni di età.

b) **Riserva dei premi annui**

Se l'assicurazione è a premi annui vitalizi, la riserva matematica, che corrisponde ad un certo tempo, essendo la differenza tra gli impegni dell'assicuratore e quelli dell'assicurato, sarà data dalla riserva del premio unico, che rappresenta gli impegni dell' assicuratore, diminuita del valore attuale (al momento del calcolo della riserva) dei premi che l'assicurato deve ancora pagare.

Questo valore attuale dei premi si avrà moltiplicando il premio annuo per l'annualità vitalizia anticipata di 1 lira corrispondente all'età dell'assicurato nel momento in cui si calcola la riserva, cioè aggiungendo l'unità alla detta annualità, ritenuto che i premi annui siano pagati anticipatamente.

Supponiamo che 60118 persone dell'età di 35 anni (V. la tavola I di sopravvivenza) abbiano contratto un'assicurazione sulla vita intera per il capitale di 1 lira verso il pagamento del premio annuo puro vitalizio di L. 0,0184 (V. Problema 3 della pag. 60); l'assicuratore avrà incassato al principio del primo anno

$$\text{L. } 0,0184 \times 60118 = \text{L. } 1106,17$$

Alla fine del primo anno gli assicurati sono ridotti a 59696, essendone morti 422, e così mentre l'assicuratore avrà dovuto pagare L. 422 per somme assicurate, avrà goduto gli interessi di un anno su L. 1106,17, supposto sempre che il premio d'assicurazione sia stato pagato anticipatamente e che le somme assicurate siano pagate alla fine dell'anno in cui ebbe luogo il decesso.

Si avrà dunque

Premi incassati al principio del 1.° anno	L. 1106,17
Interessi 4 % per un anno	» 44,25
Totale incassi	L. 1150,42
Somme assicurate pagate	» 422. —
Riserva alla fine del 1.° anno.	L. 728,42

Al principio del secondo anno gli assicurati essendo 59696, l'assicuratore avrà incassato

$$\text{L. } 0{,}0184 \times 59696 = \text{L. } 998{,}41$$

e siccome alla fine dell'anno gli assicurati sono ridotti a 59264, essendone morti 432, sarà

Riserva alla fine del 1° anno	L. 728,42
Premi incassati al principio del 2° anno	» 998,41
Totale al principio del 2° anno	L. 1726,83
Interessi 4 % per un anno	» 69,07
Totale incassi	L. 1795,90
Somme assicurate pagate.	» 432,
Riserva alla fine del 2° anno	L. 1363,90

Volendo ora calcolare la riserva di ciascun assicurato alla fine del secondo anno, si avrà

$$1363{,}90 : 59264 = \text{L. } 0{,}02301$$

il quale importo sarà dunque la riserva dopo 2 anni di una persona di 35 anni che ha stipulato un'assicurazione sulla vita intera di 1 lira, a premi annui vitalizi.

In generale, se la persona assicurata ha l'età di x anni, e sono trascorsi n anni dal contratto di assicurazione, la riserva del premio unico all'età $x+n$ sarà data dalla formola (45), ed il valore attuale dei premi annui vitalizi che dovrà ancora pagare l'assicurato sarà eguale al prodotto del premio annuo P_x per il valore della rendita vitalizia anticipata di 1 lira che è dato dalla formola (2) della pag. 33. Per cui, indicando con r_x^n la riserva matematica dei premi annui, sarà

$$r_x^n = \frac{(1 - r\, a_{x+n})}{1+r} - P_x(1 + a_{x+n}) \qquad (47)$$

Colla tavola VIII di commutazione, si ha che per le formole (15) e (17) delle pag. 53 e 58

$$\frac{(1 - r\, a_{x+n})}{1+r} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}},$$

per la formola (19) della pag. 60

$$P_x = \frac{M_x}{N_{x-1}}$$

e per la formola (3) della pag. 39, si ha

$$a_{x+n} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}},$$

per cui sostituendo questi valori nella (47), si ottiene

$$r_x^n = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{M_x}{N_{x-1}} \times \left(1 + \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}\right)$$

ma

$$1 + \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{D_{x+n} + N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

ed essendo $D_{x+n} + N_{x+n} = N_{x+n-1}$, si avrà

$$r_x^n = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{M_x}{N_{x-1}} \times \frac{N_{x+n-1}}{D_{x+n}} \qquad (48)$$

Problema 2. — Determinare la riserva matematica dopo 10 anni sopra un contratto d'assicurazione sulla vita intera stipulato da una persona di 35 anni per il capitale di L. 25000 pagando un premio puro annuo vitalizio di L. 459 (V. Problema 3 della pag. 60).

Con la formola (47) e la tavola V, si ha $a_{x+n} = a_{45} = 14{,}198$, quindi

$$r_{35}^{10} = \frac{(1 - 0{,}04 \times 14{,}198)}{1{,}04} - 0{,}0184 \times (1 + 14{,}198)$$

$$= 0{,}415 - 0{,}280 = 0{,}135$$

Con la formola (48) e la tavola VIII di commutazione, sarà

$$D_{x+n} = D_{45} = 9455,3; \quad N_{x-1} = N_{34} = 268117;$$

$$N_{x+n-1} = N_{44} = 143697,1; \quad M_x = M_{35} = 4922,68$$

$$M_{x+n} = M_{45} = 3928,497;$$

perciò

$$r_{35}^{10} = \frac{3928,497}{9455,3} - \frac{4922,68}{268117} \times \frac{143697,1}{9545,3}$$

$$= 0,415 - 0,280 = 0,135$$

Per il capitale di L. 25000, la riserva sarà

$$0,135 \times 25000 = \text{L. } 3375$$

Non esponiamo i procedimenti da seguirsi per il calcolo delle riserve matematiche nelle altre forme di assicurazione sulla vita, perchè il computo a ciò necessario sarebbe troppo lungo, e perchè gli esempi dati sono sufficienti a dare un'idea chiara sulla natura delle riserve.

c) **Riserve per gruppi di assicurati**

Nella pratica, le Compagnie di assicurazione, in luogo di calcolare le riserve matematiche sopra ogni contratto, seguono il sistema di raggruppare tutti quei contratti che si trovano in eguali condizioni per la loro forma e durata, e per l'età degli assicurati, e poscia determinano all'epoca del bilancio annuale la riserva matematica cumulativamente, come se si trattasse di un'assicurazione sola.

Per calcolare in tal caso la riserva, si moltiplica il totale dei capitali assicurati, compresi nel gruppo, per il premio unico puro corrispondente all'età attuale degli assicurati, con che si ottiene il primo termine della formola (47), ossia il valore attuale dei capitali assicurati; poscia, si moltiplica il totale dei premi annui puri per il valore attuale della rendita vitalizia anticipata di 1 lira corrispondente alla detta età attuale, con che si ottiene il secondo termine della formola suddetta, ossia il valore attuale dei premi da percepire. La differenza tra questi due prodotti darà la riserva matematica del gruppo considerato.

Nel prospetto che segue diamo l'esempio di un gruppo di assicurati colle rispettive età all'epoca in cui supponiamo abbiano stipulato i contratti di assicurazione sulla vita intera, e coi relativi premi annui puri colcolati colla formola (18) della pag. 59 e colla tavola V.

Età degli assicurati all'epoca dei contratti	Capitali assicurati	Premi annui puri	
		per ogni lire 100	per il capitale assicurato
Anni 35. . . . . L.	200000	1,836	3672
» 36. . . . . »	250000	1,906	4765
» 37. . . . . »	300000	1,980	5980
» 38. . . . . »	350000	2,058	7203
» 39. . . . . »	400000	2,139	8556
L.	1500000	—	30176

Volendo ora determinare la riserva matematica all'età attuale degli assicurati (anni 40), si dovrà calcolare il premio unico per L. 1500000 corrispondente a questa età. Siccome però, anche nei contratti che sono in condizioni eguali, i premi annui hanno in generale una scadenza diversa nello stesso anno, così per unificare le scadenze si può supporre che siano tutti pagati a metà d'anno. Perciò, si troverà il premio unico corrispondente alle due età di anni 39 e 40, prendendone poscia la media.

Quindi colla formola (15) della pag. 53 e colle tavola V, si avrà:

premio unico per l'età di anni 39

$$\frac{1 - 0{,}04 \times 15{,}708}{1{,}04} = 0{,}357$$

premio unico per l'età d'anni 40

$$\frac{1 - 0{,}04 \times 15{,}472}{1{,}04} = 0{,}366$$

premio unico medio per ogni lira di capitale

$$\frac{0,357 + 0,366}{2} = 0,362$$

e per L. 1500000

$$0,362 \times 1500000 = \text{L. } 543000$$

che sarà il valore attuale dei capitali assicurati.

Analogamente, il valore medio attuale della rendita vitalizia anticipata di 1 lira per gli anni 39 e 40, sarà colla formola (2) della pag. 33 e colla solita tavola

$$1 + \frac{15,708 + 15,472}{2} = 1 + 15,590$$

che moltiplicato per il totale dei premi annui, sarà

$$30176 \times (1 + 15,590) = \text{L. } 500620$$

valore attuale dei premi da percepire.

In fine, la riserva matematica del gruppo di assicurati dell'età attuale di anni 39 a 40, sarà

$$543000 - 500620 = \text{L. } 42380$$

Allo stesso modo si trova la riserva per l'età di anni 40 a 41, di 41 a 42, ecc.

I risultati così ottenuti per ogni gruppo di assicurati si possono riepilogare in un prospetto come il seguente:

Età attuale degli assicurati	Capitali assicurati	Premi annui puri	Valore attuale dei capitali	Valore attuale dei premi	Riserva matematica
Anni 39 a 40	1500000	30176	543000	500620	42380
» 40 a 41	»	»	556500	493408	63092
» 41 a 42	»	»	570000	486015	83985
ecc. ecc.					

d) **Riduzione e riscatto delle polizze**

All'argomento della riserva matematica va unito quello delle varie modificazioni che si possono recare al contratto di assicurazione sulla vita, tra le quali abbiamo la riduzione delle polizze ed il loro riscatto. In generale però le Compagnie d'assicurazione non concedono riduzione o riscatto delle polizze se non dopo un certo tempo di regolare funzionamento del contratto assicurativo, e di solito soltanto dopo che l'assicurato abbia pagato non meno di tre annualità.

La *riduzione delle polizze*, consiste nel diminuire il capitale assicurato qualora l'assicurato cessi di pagare il premio periodico o intenda di pagarne uno minore.

In questo caso, l'ammontare del capitale ridotto è eguale alla somma assicurata all'inizio del contratto, meno quella che l'interessato si sarebbe assicurata collo stesso premio se avesse cominciata l'assicurazione nello stesso momento in cui cessando dai pagamenti domandò la riduzione della polizza ([1]).

Problema 3. — Una persona di 35 anni ha contratto un'assicurazione sulla vita intera per il capitale di L. 25000, pagando il premio annuo vitalizio di L. 459 (V. Problema 3 della pag. 60), ma dopo 10 anni non può più continuare a pagare i premi. Si domanda quale sarà il valore della polizza liberata, cioè il capitale che la Compagnia assicuratrice pagherà alla morte dell'assicurato. Interesse 4 $^0/_0$.

Dopo trascorsi 10 anni dal contratto, l'assicurato avrà l'età di 45 anni; per cui, applicando la formola (18) o (19) della pag. 59, il premio annuo relativo alla detta età sarà di L. 683,50.

Ora, se col premio di L. 683,50 si può assicurare all'età di 45 anni il capitale di L. 25000, quale sarà il capitale corrispondente al premio di L. 459 alla stessa età? Si avrà

$$683{,}50 : 25000 = 459 : x$$

da cui

$$x = \frac{25000 \times 450}{683{,}50} = \text{L. } 16788{,}59$$

Quindi il capitale che la Compagnia pagherà alla morte dell'assicurato, sarà

$$25000 - 16788{,}59 = \text{L. } 8211{,}41$$

Il *riscatto delle polizze*, consiste nell'annullamento di una polizza di assicurazione sulla vita per volere dell'assicurato e nel pagamento da parte della Compagnia assicuratrice di una somma conveniente, detta *premio di riscatto*, in corrispettivo dei versamenti fatti dall'assicurato.

([1]) V. Tito Molinari, opera citata.

È chiaro che il valore teorico del premio di riscatto deve corrispondere esattamente alla riserva matematica all'epoca del riscatto; ma però è da osservare che per un gruppo di polizze la riserva complessiva può riguardarsi come il valore di tutte le polizze all'epoca corrispondente, mentre così non è in un contratto singolo, pel quale la riserva rappresenta un valore alquanto diverso per eccesso o per difetto, ed è per questa ragione che le Compagnie fissano il premio di riscatto inferiore alla riserva stessa.

Volendo ora determinare il prezzo di riscatto della polizza, di cui al problema precedente, ossia la somma immediata dovuta all'assicurato, cessando dopo 10 anni il pagamento dei premi annui vitalizi, basterà calcolare il premio unico assicurante il capitale di L. 8211,41 all'età di 45 anni, e colla formola (15) della pag. 53 si troverà che il prezzo di riscatto della polizza risulta di L. 3411,51.

CAPO VIII.

Assicurazioni contro le malattie.

Nelle *assicurazioni contro le malattie*, l'assicuratore guarentisce dei sussidi giornalieri in caso di malattia dell'assicurato, verso pagamento per parte di quest'ultimo di un premio unico o di premi periodici.

Questa forma di assicurazione è specialmente praticata dalle società di mutuo soccorso a vantaggio dei propri soci.

È chiaro che nel determinare la somma necessaria a guarentire i detti sussidi bisogna tenere conto, oltre che del tasso dell'interesse e della probabilità che ha l'assicurato di vivere, anche della probabilità ch'egli ha di cadere ammalato; a tale scopo, servono le *tavole di morbosità*, le quali fanno conoscere il numero annuale probabile delle giornate di malattia per tutte le varie età.

La tavola XIII che riporto nella pagina seguente contiene:

1.° il numero dei sopravviventi (maschi) dall'età di 20 anni all'età di 70, dedotto dalla tavola I di soprovvivenza;

2.° il numero probabile dei giorni di malattia in ogni anno e per ciascuna età, calcolato dalla Direzione Generale di Statistica sulla base delle notizie fornite dalle società italiane di mutuo soccorso;

3.° il premio (contributo) unico ed annuo da pagarsi per avere il sussidio di 1 lira per ogni giorno di malattia, e che fu da me calcolato nel modo indicato in appresso;

4.° il valore attuale dell'annualità vitalizia di 1 lira secondo le varie età e calcolato col procedimento indicato alla pag. 30.

b) **Premio unico**

Nel calcolo del premio unico, si deve considerare: 1.° l'ammontare del sussidio giornaliero che l'assicuratore corrispon-

XIII. - TAVOLA

che dà il contributo da pagarsi per avere il sussidio di 1 lira per ogni giorno di malattia

interesse 4 %.

Età Anni	Sopravviventi (maschi)	Giorni di malattia in un anno	Contributo unico	Contributo annuo	Valore dell'annualità di 1 lira	Età Anni	Sopravviventi (maschi)	Giorni di malattia in un anno	Contributo unico	Contributo annuo	Valore dell'annualità di 1 lira
20	66 524	5,03	121,87	6,23	19,57	45	55 230	6,71	125,83	9,01	13,97
21	66 100	5,07	122,29	6,29	19,44	46	54 654	6,84	125,19	9,19	13,63
22	65 652	5,10	122,73	6,36	19,31	47	54 058	6,97	124,44	9,37	13,28
23	65 204	5,11	123,19	6,43	19,17	48	53 441	7,17	123,58	9,50	13,01
24	61 759	5,13	123,65	6,51	18,99	49	52 797	7,37	122,54	9,69	12,64
25	64 318	5,14	124,11	6,59	18,84	50	52 124	7,57	121,32	9,89	12,27
26	63 882	5,16	124,57	6,67	18,68	51	51 420	7,77	119,92	10,10	11,88
27	63 451	5,17	125,03	6,75	18,51	52	50 675	7,97	118,35	10,31	11,48
28	63 025	5,24	125,49	6,84	18,34	53	49 885	8,26	116,62	10,54	11,07
29	62 605	5,30	125,90	6,94	18,15	54	49 089	8,55	114,52	10,76	10,64
30	62 188	5,37	126,29	7,03	17,96	55	48 274	8,85	112,07	10,99	10,20
31	61 773	5,43	126,58	7,13	17,75	56	47 421	9,14	109,28	11,22	9,74
32	61 360	5,50	126,84	7,23	17,54	57	46 518	9,43	106,16	11,46	9,26
33	60 948	5,55	127,05	7,34	17,32	58	45 533	9,78	102,78	11,71	8,78
34	60 535	5,61	127,22	7,44	17,09	59	44 518	10,14	98,92	11,96	8,27
35	60 118	5,66	127,35	7,56	16,85	60	43 408	10,49	94,70	12,20	7,76
36	59 696	5,72	127,46	7,68	16,60	61	42 199	10,85	90,08	12,46	7,23
37	59 264	5,77	127,53	7,81	16,33	62	40 919	11,20	84,98	12,72	6,68
38	58 819	5,88	127,59	7,94	16,06	63	39 572	11,64	79,34	12,98	6,11
39	58 355	5,99	127,58	8,08	15,79	64	38 160	12,08	73,01	13,25	5,51
40	57 874	6,11	127,51	8,22	15,51	65	36 689	12,52	65,91	13,51	4,88
41	57 377	6,22	127,34	8,37	15,22	66	35 160	12,96	57,94	13,76	4,21
42	56 865	6,33	127,10	8,52	14,92	67	33 573	13,40	49,00	14,00	3,50
43	56 338	6,46	126,78	8,68	14,61	68	31 931	13,84	38,92	14,25	2,73
44	55 790	6,59	126,36	8,84	14,30	69	30 202	14,28	27,58	14,49	1,90
						70	28 378	14,72	14,72	14,72	1,00

derà all'assicurato in caso di malattia; 2.° l'età dell'assicurato; 3.° il numero probabile dei giorni di malattia corrispondenti all'età dell'assicurato e agli anni successivi; 4.° la probabilità che ha l'assicurato di essere in vita dopo 1, dopo 2, dopo 3 anni, ecc. [1].

Sia x l'età dell'assicurato, siano m_x, m_{x+1}, m_{x+2}, ecc., i numeri dei giorni di malattia corrispondenti alle età x, $x+1$, $x+2$, ecc., dati dalla tavola di morbosità, sia s il sussidio dovuto all'assicurato per ciascuno di questi giorni, siano l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, ecc., i numeri dei superstiti alle dette età, dati dalla tavola di sopravvivenza adottata, e sia r il tasso dell'interesse.

Ora, per avere il premio unico richiesto, basta calcolare quale somma deve pagare l'assicurato in ciascun anno di sua vita e poscia riunire i risultati.

Nel primo anno, essendo m_x il numero probabile dei giorni di malattia ed s il sussidio per ogni giorno, l'assicurato dovrà pagare la somma

$$s \times m_x$$

Nel secondo anno l'assicurato avrà l'età $x+1$, il numero probabile dei giorni di malattia in tal anno sarà m_{x+1} e la somma che riceverà in sussidio sarà

$$s \times m_{x+1}$$

per cui, per avere il valore attuale di tale somma, bisognerà moltiplicarla per $\frac{l_{x+1}}{l_x}$, ossia per la probabilità che ha l'assicurato di vivere al principio del secondo anno, e per $\frac{1}{1+r}$ che è il valore di 1 lira scontata per un anno al tasso r. Adunque,

[1] Nel calcolo dei contribuenti bisognerebbe tenere conto anche di queste condizioni che potrebbero essere stabilite negli statuti delle società di mutuo soccorso, cioè: 1.° che l'importo dei sussidi debba variare secondo che i soci sono inscritti da più o meno tempo e secondo la durata della malattia; 2.° che i sussidi siano pagati per un tempo illimitato e subito dopo la denuncia della malattia, o soltanto temporaneamente e dopo qualche giorno da quello della denuncia.

la somma che l'assicurato dovrà pagare ora pel secondo anno, sarà

$$s \times m_{x+1} \times \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \frac{1}{1+r}$$

Nel terzo anno il numero probabile dei giorni di malattia è m_{x+2}, la probabilità che l'assicurato sia vivo è $\frac{l_{x+2}}{l_x}$, perciò la somma che dovrà pagare ora per il terzo anno, sarà

$$s \times m_{x+2} \times \frac{l_{x+2}}{l_x} \times \frac{1}{(1+r)^2}$$

e così di seguito.

In generale, la somma che l'assicurato dovrà pagare attualmente per acquistare il diritto al sussidio giornaliero nei giorni di malattia dell'anno $n + 1$, sarà

$$s \times m_{x+n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \times \frac{1}{(1+r)^n}$$

Facendo l'addizione di tutte queste espressioni, si avrà il premio unico che l'assicurato di età x dovrà pagare attualmente per assicurarsi il sussidio giornaliero s per i giorni di malattia che potranno verificarsi durante la sua vita,

Consideriamo, ad esempio, una società di 33573 individui, tutti dell'età di anni 67, e che si debba determinare la somma che ciascun socio dovrà pagare attualmente per assicurarsi il sussidio di 1 lira per ogni giorno di malattia, interesse 4 %$_0$ (V. la tavola XIII).

All'età di anni 67, essendo 13,40 il numero annuale dei giorni di malattia per persona e L. 1 il sussidio giornaliero, ciascuno dei 33573 soci dovrà pagare la somma di L. 13,40.

All'età di 68 anni il numero dei giorni di malattia è 13,84, per cui ciascuno dei detti soci dovrà pure pagare fra un anno la somma di L. 13,84, se sarà ancora in vita. Ma dalla tavola si ha che il numero dei sopravviventi all'età di anni 68 è di 31931, quindi il valore attuale di detta somma pagabile fra un anno, sarà

$$\frac{13,84}{1,04} \times \frac{31931}{33573} = \text{L. } 12,66$$

All'età di anni 69 si hanno 14,28 giorni di malattia e 30202 superstiti, per cui il valore attuale della somma di L. 14,28 che ciascuno dei 33573 soci dovrebbe pagare fra due anni, se fosse ancora in vità, sarà

$$\frac{14,28}{1,04^2} \times \frac{30202}{33573} = \text{L. } 11,88$$

Per l'età di anni 70, e coll'aiuto della solita tavola, si avrà

$$\frac{14,72}{1,04^3} \times \frac{28378}{33573} = \text{L. } 11,06$$

In conclusione, la somma che dovrà pagare attualmente ciascun individuo componente la società sovrindicata per assicurarsi il sussidio giornaliero di 1 lira in caso di malattia, sarà

$$13,40 + 12,66 + 11,88 + 11,06 = \text{L. } 49,00$$

come apparisce dalla tavola prontuaria.

In modo analogo, partendo da tutte le età fino a 70 anni, che è il limite estremo della tavola, si otterranno i premi unici per ciascuna età, sempre ritenuto che il sussidio giornaliero di 1 lira in caso di malattia sia anticipato, come se i giorni di malattia si verificassero tutti in principio d'anno ([1]).

Il calcolo dei premi unici si può fare anche nella seguente maniera.

Se 30202 soci dell'età di 69 anni (V. la tavola XIII) volessero assicurarsi fino all'età di 70 anni un sussidio giornaliero di 1 lira per ogni giorno di malattia, essendo 14,28 i giorni di malattia, dovrebbero versare la somma di

$$14,28 \times 30202 = \text{L. } 431285,56$$

più la somma che i superstiti 28378 all'età di 70 anni dovrebbero versare in quell'anno per 14,72 giorni di malattia, scontata per un anno al 4 %, cioè

([1]) In realtà i sussidi sono pagati durante il corso della malattia.

$$\frac{14{,}72 \times 28378}{1{,}04} = \frac{417724{,}16}{1{,}04} = \text{L. } 401657{,}69$$

ed in totale la somma di

$$431285{,}56 + 401657{,}69 = \text{L. } 832943{,}25$$

ed ogni socio il premio unico di

$$832943{,}25 : 30202 = \text{L. } 27{,}58$$

I 31931 soci all'età di 68 anni, essendo in quell'anno 13,84 i giorni di malattia, dovrebbero versare la somma unica di

$$13{,}84 \times 31931 = \text{L. } 441925{,}04$$

più la somma di L. 832943,25 che i superstiti 30202 all'età di 68 anni dovrebbero versare in quell'anno, scontata per un anno, cioè

$$832943{,}25 : 1{,}04 = \text{L. } 800906{,}96$$

ed in totale la somma di

$$441925{,}04 + 800906{,}97 = \text{L. } 1242832{,}01$$

ed ogni socio il premio unico di

$$1242832{,}01 : 31931 = \text{L. } 38{,}92$$

Allo stesso modo, per l'anno 67, si avrà

$$13{,}40 \times 33573 = \text{L. } 449878{,}20$$

$$1242832{,}01 : 1{,}04 = \text{L. } 1195030{,}78$$

$$449878{,}20 + 1195030{,}78 = \text{L. } 1644908{,}98$$

$$1644908{,}98 : 33573 = \text{L. } 49{,}00$$

e così si procede per le altre età.

Sinora abbiamo considerato il caso di un'assicurazione immediata per $n+1$ anni, cioè che incomincia dal giorno in cui l'assicurato paga il premio unico e dura per tutto il tempo della sua vita; ma l'assicurazione potrebbe essere differita o protratta di n anni dopo l'età x dell'assicurato.

In tal caso, bisogna calcolare quale somma dovrà pagare l'assicurato se pagasse fra n anni, cioè quando avrà l'età $x + n$, e trovare il valore attuale di tale somma.

Se invece l'assicurazione è limitata o temperanea, cioè è fatta per un numero n di anni, la somma a pagarsi dall'assicurato sarà la differenza di due somme corrispondenti la prima all'assicurazione immediata relativa all'età x dell'assicurato, la seconda ad un'assicurazione differita di n anni.

Se infine l'assicurazione è differita ed anche limitata, la somma a pagarsi sarà la differenza di due somme corrispondenti a due assicurazioni differite, la prima relativa all'età $x+n$ dell'assicurato, l'altra all'età $x+n'$.

Problema I. — Una persona dell'età di anni 40, che fa parte di una società di mutuo soccorso, domanda quale premio unico dovrà pagare per avere il diritto di riscuotere il sussidio giornaliero di L. 2,50 per ogni giorno di malattia fino all'età di anni 71.

Dalla tavola XIII si ha che per ottenere il sussidio di 1 lira una persona di 40 anni deve pagare L. 127,51, quindi per avere il sussidio di L. 2,50 dovrà pagare la somma di

$$127{,}51 \times 2{,}50 = \text{L. } 318{,}78$$

Problema 2. — Determinare il premio unico che dovrebbe pagare la persona, di cui al problema precedente, qualora l'assicurazione cominciasse fra 10 anni.

Si trovi prima il premio a pagarsi da quella persona, se avesse l'età di anni 50, e colla tavola si avrà

$$121{,}32 \times 2{,}50 = \text{L. } 303{,}30$$

Poscia, si calcoli il valore attuale di tale somma, scontandola per 10 anni al 4 $^0/_0$, e tenendo conto della probabilità che ha la persona di raggiungere l'età di anni 50, e che è rappresentata dalla frazione $\frac{52124}{57874}$.

Il premio unico ricercato sarà dunque

$$\frac{303{,}30}{1{,}04^{10}} \times \frac{52124}{57874} = \text{L. } 184{,}54$$

Problema 3. — Una persona dell'età di anni 30 domanda di pagare un premio unico ad una società di mutuo soccorso per acquistare il diritto di riscuotere per 15 anni un sussidio giornaliero di L. 3 in caso di malattia.

Bisogna anzitutto calcolare il premio unico a pagarsi per un'assicurazione immediata relativa all'età di anni 30, e si avrà

$$126{,}29 \times 3 = \text{L. } 378{,}87$$

quindi il premio unico corrispondente ad un'assicurazione protratta di 15 anni, cioè relativa all'età di 45 anni, che sarà

$$\frac{125,83}{1,04^{15}} \times \frac{55230}{62188} = \text{L. } 62,04$$

La differenza dei due risultati darà il premio unico richiesto. Si avrà

$$378,87 - 62,04 = \text{L. } 316,83$$

Problema 4. — Determinare la somma che dovrà pagare attualmente una persona di 35 anni per acquistare il diritto di ricevere un sussidio di L. 3,50 per ogni giorno di malattia che si verificherà dai 50 ai 60 anni di sua età.

Si determini prima la somma a pagarsi per un'assicurazione protratta di 25 anni, cioè relativa all'età di anni 60, e si avrà

$$\frac{94,70 \times 3,50}{1,04^{25}} \times \frac{43408}{60118} = \text{L. } 89,77$$

Si calcoli quindi la somma a pagarsi per un'assicurazione protratta di 15 anni, cioè relativa all'età di anni 50, e si avrà

$$\frac{121,32 \times 3,50}{1,04^{15}} \times \frac{52124}{60118} = \text{L. } 204,42$$

La somma richiesta sarà

$$204,42 - 89,77 = \text{L. } 114,65$$

b) **Premi annui**

L'assicurazione dei sussidi può farsi per mezzo di premi annui, anzichè col pagamento di un premio unico.

Ora, per determinare il premio annuo corrispondente al premio unico, se il sussidio è immediato basta dividere il premio unico per il valore attuale della rendita vitalizia immediata anticipata di 1 lira relativa all'età dell'assicurato, e che è dato dalla tavola XIII.

Se, invece, il sussidio è differito o temporaneo, bisogna dapprima trovare come sopra il valore attuale della rendita di 1 lira, dedurre da questo il valore attuale dalla rendita di 1 lira corrispondente all'età dell'assicurato dopo gli anni di differimento, e dividere poscia il premio unico per questa differenza.

Problema 5. — Si domanda il premio annuo che dovrà pagare una persona dell'età di anni 35 per assicurarsi un sussidio di L. 3,50 per ogni giorno di malattia.

Il premio unico sarà

$$127{,}35 \times 3{,}50 = \text{L. } 445{,}73$$

Dalla tavola si ha che il valore attuale della rendita vitalizia anticipata di 1 lira all'età di anni 35 è di L. 16,85, perciò il premio annuo anticipato sarà

$$445{,}73 : 16{,}85 = \text{L. } 26{,}46$$

Più semplicemente, basta moltiplicare il contributo annuo per 1 lira di sussidio dato dalla tavola per il sussidio che si vuole assicurare, e si ha

$$7{,}56 \times 3{,}50 = \text{L. } 26{,}46$$

Problema 6. — Una persona dell'età di anni 32 domanda quale premio dovrebbe pagare per 12 anni perchè una società di mutuo soccorso si obbligasse di corrispondergli dopo questo tempo il sussidio giornaliero di L. 4 in caso di malattia.

Procedendo in modo analogo al Problema 2, il premio unico corrispondente all'età di anni 44 e scontato per anni 12, sarà

$$\frac{126{,}36 \times 4}{1{,}04^{12}} \times \frac{55790}{61360} = \text{L. } 287{,}03$$

Il valore attuale della rendita vitalizia anticipata di 1 lira relativa all'età di 32 anni è di L. 17,54, e quello dell'età di 44 anni, scontato come sopra, è

$$\frac{14{,}30}{1{,}04^{12}} \times \frac{55790}{61360} = \text{L. } 8{,}12$$

Quindi il valore attuale della rendita di 1 lira pagata soltanto per 12 anni, sarà

$$17{,}54 - 8{,}12 = \text{L. } 9{,}42$$

ed il premio annuo domandato

$$287{,}03 : 9{,}42 = \text{L. } 30{,}47$$

c) Contributi mensili

In molte società di mutuo soccorso è stabilito dai rispettivi regolamenti che i premi (contributi) dei soci per guarentirsi dei sussidi giornalieri in caso di malattia possano essere a semestri, trimestri, mesi ed anche a settimane.

In tali casi, si trascura di tener conto dell'interesse per le frazioni d'anno, e si suole determinare i premi prendendo per essi la quota proporzionale del premio annuo, cioè per il premio semestrale la metà di quello annuo, per il premio mensile la dodicesima parte, e così di seguito.

Il computo del premio è reso facile dalla tavola XIII, la quale dà anche il contributo annuo per ogni lira di sussidio secondo le varie età.

Si osservi poi che la società di mutuo soccorso, dovendo far fronte alle proprie spese di amministrazione, di medici e medicine, della relativa quota proporzionale bisognerà aumentare il contributo o diminuire il sussidio, qualora non si preferisca di destinare a tale scopo un fondo speciale.

Problema 7. — Una società di mutuo soccorso accorda L. 2,50 al giorno di sussidio in caso di malattia, calcolando di L. 0,75 la quota di spese d'amministrazione, medico e medicine, per malato e per giornata di malattia. Quanto dovrà far pagare per mese ai soci che entrano nella società a 30 anni di età?

Come dalla tavola prontuaria, il contributo annuo, per l'età di 30 anni, essendo di L. 7,03, quello mensile sarà di 7,03 : 12 = L. 0,59 che moltiplicato per L. 3,25 (2,50 + 0,75), dà il contributo mensile totale di L. 1,92.

CAPO IX

Bilanci tecnici

Allo scopo che la società assicuratrice possa rendersi ragione delle sue condizioni in rapporto agli impegni che ha per l'avvenire verso i suoi assicurati, occorre verificare se il suo patrimonio sia maggiore od inferiore della somma ch'essa dovrebbe avere disponibile per essere in grado di soddisfare i propri impegni, cioè fare un confronto fra il patrimonio sociale unito al valore capitale attuale di tutti i premi futuri ed il valore capitale attuale di tutte le somme assicurate aumentato dell'ammontare delle spese d'amministrazione ragguagliate alla media degli ultimi anni.

Questo raffronto costituisce il *bilancio tecnico* o *bilancio di competenza* della società assicuratrice. Se il primo importo supera il secondo, si dice esistere un *avanzo tecnico*, e la società si può ritenere solvibile; nel caso opposto, si ha un *disavanzo tecnico*, e la società non potrebbe far fronte a propri impegni. Esempio:

Bilancio tecnico

ATTIVO		PASSIVO	
Patrimonio sociale . . L.	800,000	Valore capitale attuale di tutte le somme assicurate . . . . . . L.	5,850,000
Valore capitale attuale di tutti i premi futuri . . . . »	5,450,000	Spese d'amministrazione ragguagliate alla media degli ultimi anni. . . . . . »	50,000
		L.	5,900,000
		Avanzo tecnico »	350,000
L.	6,250,000	L.	6,250,000

Se vi ha avanzo tecnico, ciò può essere o perchè la società assicuratrice trova modo d'impiegare i suoi capitali ad un tasso d'interesse maggiore di quello previsto, o perchè la mortalità reale degli assicurati risulta minore di quella indicata dalla tavola di sopravvivenza adottata nelle assicurazioni in caso di morte e maggiore in quelle in caso di vita.

In caso invece di disavanzo tecnico, questo può derivare da ragioni opposte a quelle che hanno determinato l'avanzo, o da spese d'amministrazione troppo forti in relazione all'estensione degli affari, o da un caricamento dei premi insufficiente a compensare le oscillazioni del rischio, od anche da un numero troppo esiguo di assicurati. Questo disavanzo non può essere colmato che dalla riserva statutaria o speciale della società, od in sua mancanza o deficienza dal capitale sociale ([1]).

Vediamo ora come potrebbe essere formato il bilancio tecnico di una società di mutuo soccorso.

Anzitutto bisogna dividere i soci secondo le loro diverse età. Questa divisione dei soci per età sulla quale è fondato tutto il bilancio, supponiamo risulti dal seguente prospetto:

Età Anni	N. dei Soci	Età Anni	N. dei Soci	Età Anni	N. dei Soci	Età Anni	N. dei Soci	Età Anni	N. dei Soci	Età Anni	N. dei Soci
20	6	29	32	38	53	47	44	56	23	65	8
21	9	30	43	39	53	48	37	57	25	66	4
22	13	31	40	40	49	49	32	58	20	67	5
23	12	32	46	41	48	50	34	59	21	68	1
24	20	33	45	42	54	51	32	60	15	69	2
25	23	34	48	43	56	52	30	61	14	70	1
26	25	35	52	44	47	53	23	62	12		
27	32	36	56	45	54	54	27	63	13		
28	35	37	60	46	53	55	20	64	13		

Abbiamo così in totale 1520 soci, ritenuto che nel distribuire i soci in gruppi secondo le diverse età, quelli che avessero compiuto da più di sei mesi una certa età, siano inscritti all'età successiva.

Dopo ciò, supponiamo che la società di mutuo soccorso si proponga di corrispondere a ciascun socio il sussidio di L. 2

([1]) V. Tito Molinari, opera citata.

per ogni giorno di malattia verso il contributo annuo costante di L. 24.

Ora, si troverà il valore capitale attuale di tutti i contributi dei soci qualora ogni socio versasse solamente 1 lira all'anno, moltiplicando, per ciascuna età, il valore attuale dell'annualità vitalizia di 1 lira, che è dato dalla tavola XIII, pel numero corrispondente dei soci.

Così, per l'età di 20 anni, si avrà

L. 19,57 $\times$ 6 = L. 117,42

per l'età di 21 anni

L. 19,44 $\times$ 9 = L. 174,96

Si avrà poi il valore capitale attuale complessivo dei sussidi di 1 lira per ciascuna giornata di malattia, moltiplicando, per ciascuna età, il valore capitale del sussidio di 1 lira, che è pure dato dalla tavola XIII, pel corrispondente numero dei soci.

Così, per l'età di 20 anni, si avrà

L. 121,87 $\times$ 6 = L. 731,22

per l'età di 21 anni

L. 122,29 $\times$ 9 = L. 1100,61

ecc.

I risultati di tutte queste operazioni appariscono dal seguente

Bilancio tecnico

Età — Anni	Numero dei soci	Valore capitale per un socio: del contributo annuo di 1 lira	Valore capitale per un socio: del sussidio di 1 lira per malattia	Valore capitale per tutti i soci della stessa età: dei contributi	Valore capitale per tutti i soci della stessa età: dei sussidi per malattia
20	6	19,57	121,87	117,42	731,22
21	9	19,44	122,29	174,96	1100,61
22	13	19,31	122,73	251,03	1595,49
23	12	19,17	123,19	230,04	1478,28
24	20	18,99	123,65	379,80	2473,00
25	23	18,84	124,11	433,32	2854,53
26	25	18,68	124,57	467,00	3114,25
27	32	18,51	125,03	592,32	4000,96
28	35	18,34	125,49	641,90	4392,15
29	32	18,15	125,90	580,80	4028,80
30	43	17,96	126,29	772,28	5430,47
31	40	17,75	126,58	710,00	5063,20
32	46	17,54	126,84	806,84	5834,64
33	45	17,32	127,05	779,40	5717,25
34	48	17,09	127,22	820,32	6106,56
35	52	16,85	127,35	876,20	6622,20
36	56	16,60	127,46	929,60	7137,76
37	60	16,33	127,53	979,80	7651,80
38	53	16,06	127,59	851,18	6762,27
39	53	15,79	127,58	942,87	6761,74
40	49	15,51	127,51	759,99	6247,99
41	48	15,22	127,34	730,56	6112,32
42	54	14,92	127,10	805,68	6863,40
43	56	14,61	126,78	818,16	7099,68
44	47	14,30	126,36	672,10	5938,92
	957			16123,57	121119,49

Età — Anni	Numero dei soci	Valore capitale per un socio		Valore capitale per tutti i soci della stessa età	
		del contributo annuo di 1 lira	del sussidio di 1 lira per malattia	dei contributi	dei sussidi per malattia
45	54	13,97	125,83	754,38	6794,82
46	53	13,63	125,19	722,39	6635,07
47	44	13,28	124,44	584,32	5475,36
48	37	13,01	123,58	481,37	4572,46
49	32	12,64	122,54	404,48	3921,28
50	34	12,27	121,32	417,18	4124,88
51	32	11,88	119,92	380,16	3837,44
52	30	11,48	118,35	344,40	3550,50
53	23	11,07	116,62	254,61	2682,26
54	27	10,64	114,52	287,28	3092,04
55	20	10,20	112,07	204,00	2241,40
56	23	9,74	109,28	146,10	2513,44
57	25	9,26	106,16	231,50	2654.00
58	20	8,78	102,78	175,60	2055,60
59	21	8,27	98,92	173,67	2077,32
60	15	7,76	94,70	116,40	1420,50
61	14	7,23	90,08	101,22	1261,12
62	12	6,68	84,98	80,16	1019,76
63	13	6,11	79,34	79,43	1031,42
64	13	5,51	73,01	71,63	949,13
65	8	4,88	65,91	39,04	527,28
66	4	4,21	57,94	16,84	231,76
67	5	3,50	49,00	17,50	245,00
68	1	2,73	38,92	2,73	38,92
69	2	1,90	27,58	3,80	55,16
70	1	1,00	14,72	1,00	14,72
	563			6090,19	62922,64

Dalla tavola precedente si ha che il valore capitale attuale dei contributi annui di 1 lira, per tutti i 1520 soci, è di

$$\text{L. } 16123{,}57 + 6090{,}19 = \text{L. } 22213{,}76$$

e per il contributo di L. 24 annue, sarà

$$\text{L. } 22213{,}76 \times 24 = \text{L. } 533130{,}24$$

ed il valore capitale attuale dei sussidi di 1 lira per giornata di malattia, è di

$$\text{L. } 121119{,}49 + 62922{,}64 = \text{L. } 184042{,}13$$

e per il sussidio di L. 2, sarà

$$\text{L. } 184042{,}13 \times 2 = \text{L. } 368084{,}26$$

Adunque, il bilancio della società di mutuo soccorso presenta un avanzo tecnico, perchè il valore attuale dei contributi è maggiore di quello dei sussidi, e quindi essa sarebbe in grado di mantenere gli impegni verso i soci.

Ma se teniamo conto delle spese d'amministrazione, ad esempio in ragione del 10 % sull'importo dei contributi, e supponiamo che il sussidio per giornata di malattia sia di L. 3, l'importo dei contributi sarebbe ridotto a L. 479817,22 e quello dei sussidi salirebbe a L. 552126,39, e si avrebbe un disavanzo tecnico di L. 72309,17, che bisognerebbe coprire col patrimonio sociale, qualora non si voglia, come si è detto, aumentare i contributi o diminuire i sussidi.

Prof. G. MARCHESINI.

	Errata	*Corrige*
pag. 26, col. 4 —	17,544	17,554
» 33, lin. 13 —	16,590	16,599
» 44, » 19 —	L. 33752	L. 33732
» 67, » 17 —	$\frac{15235}{1{,}04^{20} \times \text{ecc.}}$	$\frac{15235 \times 10000}{1{,}04^{20} \times \text{ecc.}}$
» 78, » 18 —	$\times \frac{l_{x+n}}{l_x}$	$\times \frac{l_x}{l_{x+n}}$

R. OSSERVATORIO METEOROLOGICO
DI UDINE
CON ANNESSA RETE TERMO - UDOMETRICA

Riassunto delle osservazioni eseguite nell'anno 1906

I.°

Osservatorio meteorologico di Udine.

Bacino Torre - Isonzo.

Latitudine geografica		46.° 4′
Longitudine	da Greenwich	13.° 13′
	» Roma	0.° 45′
Altezza	della stazione sul mare	m. 116.0
	dell'udometro sul suolo	» 12.5
	dei termografi sul suolo	» 7.5

a) *Pressione atmosferica.*

(Tabella I).

Media annuale		mm.	751.63	
» anno precedente		»	751.36	
	differenza in più	mm.	0.27	
Media mensile	massima	mm.	756.15	Gennaio
	minima	»	747.53	Febbraio
	differenza	mm.	8.62	
Media giornaliera	massima	mm.	765.42	Novembre 23
	minima	»	733.99	Dicembre 10
	differenza	mm.	31.43	
Massimo assoluto		mm.	765.86	Novembre 23
Minimo »		»	732.20	Dicembre 10
	differenza	mm.	33.66	

b) *Temperatura.*

(Tabella II).

Media annuale		12.° 46	
» anno precedente		12. 26	
	differenza in più	0. 20	
Media mensile	massima	22. 56	Agosto
	minima	1. 88	Gennaio
	differenza	20. 68	
Media giornaliera	massima	27. 10	Agosto 3
	minima	-4. 52	Dicembre 31
	differenza	31. 62	
Estremi	massimo assoluto	32. 8	Agosto 4
	minimo »	-7. 1	Dicembre 31
	differenza	39. 9	

c) *Umidità assoluta.*

(Tabella III).

Media annuale		mm. 7.75	
» anno precedente		» 7.95	
	differenza in meno	mm. 0,20	
Media mensile	massima	mm. 13.27	Luglio
	minima	» 3.54	Gennaio
	differenza	mm. 9.73	
Media giornaliera	massima	mm. 17.44	Agosto 3
	minima	» 1.67	Dicembre 31
	differenza	mm. 15.77	
Estremi	massimo assoluto	mm. 17.91	Agosto 25
	minimo »	» 0.88	Febbraio 8
	differenza	mm. 17.03	

d) *Umidità relativa.*

(Tabella IV).

Media annuale		62.9	
» anno precedente		64.5	
	differenza in meno	1.6	
Media mensile	massima	74.8	Novembre
	minima	55.9	Aprile
	differenza	18.9	
Media giornaliera	massima	94.3	Novembre 18, Dicembre 24
	minima	23.8	Marzo 31
	differenza	70.5	
Estremi	massimo assoluto	99.0	Ottobre 23, Nov. 1, 3, 6
	minimo »	10.0	Febbraio 8
	differenza	89.0	

e) *Pluviometro.*

(Tabella V).

Totale anno		mm. 1451.4	
» anno precedente		» 1673.5	
	differenza in meno	mm. 222.1	
Totale mensile	massimo	mm. 222.7	Novembre
	minimo	» 70.6	Gennaio
	differenza	mm. 152.1	
Massima giornaliera		mm. 65.6	Novembre 1

f) *Qualità dei giorni e velocità del vento.*

(Tabella VI).

Giorni	sereni . . .	78	Giorni	con pioggia . . .	119
	misti . . .	216		» neve	4
	coperti . . .	71		» grandine . .	7
				» temporali . .	23
				» brina	10
				» nebbia . . .	10
				» gelo	27
				» vento forte .	27

Media velocità oraria del vento	annuale		Cm.	1.274	
	mensile	massima	»	2.973	Marzo
		minima .	»	0.344	Maggio
Velocità oraria massima			»	25.000	Marzo 23

g) *Evaporimetro - Nebulosità.*

(Tabella VII).

Acqua evaporata	totale anno		mm.	817.0	
	» anno precedente		»	737.2	
	differenza in più .		mm.	79.8	
	Totale mensile	massimo . .	mm.	125.2	Agosto
		minimo . . .	»	29.4	Gennaio
	differenza . .		mm.	95.8	
	massimo giornaliero .		mm.	7.6	Giugno 6

Nebulosità (Decimi di cielo coperto)	media annuale		4.9	
	» anno precedente . .		4.9	
	differenza		0.0	
	Media mensile	massima	6.4	Dicembre
		minima	2.4	Agosto

II.

Rete termo-udometrica.

La rete comprende attualmente 5 stazioni, le cui posizioni geografiche e altimetriche sono riportate nel seguente prospetto, e nelle tabelle VIII-XII sono trascritti i dati meteorici ad esse relativi.

Stazioni	Bacino idrografico	Latitudine geografica	Longitudine		Altezza			Osservatori
			da Greenwich	da Roma	della stazione sul mare	dell' udometro sul suolo	dei termografi sul suolo	
					m.	m.	m.	
Aviano	Livenza	46°.4'	12°.36'	0°.7'	166	0.90	1.60	Marco Zozzolotto
Collina	Degano-Tagl.	46.35	12.51	0.22	1242	1.80	3.40	Eugenio Caneva
Gemona	Tagliamento	46.16	13.9	0.40	294	10.44	3.95	Sac. Francesco Elia
Latisana	Tagliamento	45.47	13.1	0.32	7	2.15	2.60	Cav. D.r Peloso Gaspari
Maniago	Meduna-Liv.	46.10	12.43	0.14	290	1.30	4.00	Co. Ing. Enrico d'Attimis

I.

Osservatorio di Udine - Anno 1906

Pressione atmosferica. Tabella I.

Mesi	Media mensile	Media giornaliera massima	Media giornaliera minima	estremi massimo	giorni	estremi minimo	giorni
Gennaio	**756.15**	762.60	741.53	764.21	15	740.75	8
Febbraio	**747.53**	758.60	738.13	758.69	1	737.13	4
Marzo	750.29	765.01	736 69	765.47	6	735.98	23
Aprile	752.95	764.61	738.90	765.79	4	738.51	27
Maggio	748.59	755.88	736.03	756.93	29	735.76	17
Giugno	750.63	756.38	743.73	756.83	27	741.71	2
Luglio	751.39	755.53	745.41	756.89	4	744·27	6
Agosto	752.47	759.91	746 93	760.50	29	746.51	11
Settembre	753.97	762.97	745.78	764.43	28	743.99	16
Ottobre	753.58	758.65	744.30	759.04	21	742.94	31
Novembre	753.41	**765.42**	740.28	**765.86**	23	739.51	19
Dicembre	748.65	763.37	**733.99**	763.91	22	**732.20**	10
Media annuale	**751.63**						

Temperatura Tabella II.

Mesi	Media mensile	Media giornaliera massima	Media giornaliera minima	estremi massimo	giorni	estremi minimo	giorni
Gennaio	**1.88**	5.20	-3.10	9.9	31	-6.3	2
Febbraio	4.25	8.20	0.60	10.0	17	-2.9	11
Marzo	6.73	10.15	4.40	15.3	18	0.3	29
Aprile	11.81	16.75	5.48	24.8	13	0.6	4
Maggio	16.77	22.88	10.50	29.8	27	5.3	3
Giugno	20.16	25.10	14.68	30.6	28	10.3	3.5
Luglio	22.31	25.35	15.82	31.6	26	13.4	15
Agosto	**22.56**	**27.10**	15.03	**32.8**	4	10.9	20
Settembre	17.42	25.18	10.50	31.3	4-8	5.3	26
Ottobre	13.55	17.23	6.72	21.8	5-7	4.1	28
Novembre	9.58	14.98	4.67	17.2	25	0.7	16
Dicembre	2.58	7.32	**-4.52**	10.1	4	**-7.1**	31
Media annuale	**12.46**						

Umidità assoluta. Tabella III

Mesi	Tensione del vapore in mm.						
	Media mensile	Media giornaliera		estremi			
		massima	minima	massimo	giorni	minimo	giorni
Gennaio	**3.54**	5.19	1·78	5.67	8	1.47	23
Febbraio	3.92	7.89	1.77	8.39	28	**0.88**	8
Marzo	5.04	7.46	1.69	8.04	12	1.06	30
Aprile	5.96	8.66	3.15	9.78	18	1.36	3
Maggio	9.24	14.27	6.27	16.37	29	4.16	27
Giugno	10.81	15.42	4.62	17.20	28	3.31	21
Luglio	**13.27**	16.55	8.42	17.23	11	7.63	2
Agosto	12.38	**17.44**	7.03	**17.91**	25	6.25	29
Settembre	9.09	14.42	5.22	17.66	7	4.30	12
Ottobre	8.82	12.67	4.59	12.93	7	4.17	28
Novembre	7.04	11.84	4.14	12.16	11	3.64	28
Dicembre	3.87	6.58	**1.67**	7.39	1	1.66	31
Media annuale	**7.75**						

Umidità relativa. Tabella IV.

Mesi	Rapporto tra l'umidità assoluta e la tensione massima $\times$ 100						
	Media mensile	Media giornaliera		estremi			
		massima	minima	massimo	giorni	minimo	giorni
Gennaio	63.7	89.0	44.3	95	8.19	21	31
Febbraio	59.4	93 0	27.0	97	28	**10**	8
Marzo	65.0	90.3	**23.8**	97	12	13	10
Aprile	**55.9**	81.7	25.7	89	19	21	11
Maggio	62.0	87.7	38.0	90	17	24	27
Giugno	58.0	81 5	28.7	93	19	17	6
Luglio	62.9	82.3	45.8	93	6	38.5	2
Agosto	57.0	81.3	39.0	86	17	30	28
Settembre	57.6	81.0	34.3	93	16	24	12
Ottobre	71.7	89.3	46.3	**99**	23	25	14
Novembre	**74.8**	**94.3**	41.0	**99**	1.3.6	29	28
Dicembre	66.9	**94.3**	49.6	98	24	24	10
Media annuale	**62.9**						

Pluviometro. Tabella V.

Mesi	Acqua raccolta in mm.							
	Periodo			Totale	In ore	Massima giornaliera		
	21h - 9	9-15	15-21			mm.	In ore	Giorni
Gennaio	48.8	2.2	19.6	**70.6**	39	38.1	8	7
Febbraio	81.9	22.9	19.5	124.3	83	64.0	22	13
Marzo	80.2	11.9	28.2	120.3	85	26.3	13	23
Aprile	117.7	19.7	54.4	191.8	93	43.5	6	21
Maggio	39.2	21.6	37.4	98.2	58	19.1	10	18
Giugno	26.2	7·3	41.0	74.5	53	14.4	18	10
Luglio	60.5	32.9	30.4	123.8	40	28.6	1	27
Agosto	48.3	13.2	36.1	97.6	24	41.8	8	17
Settembre	48·3	11.9	10.8	71.0	40	29.0	10	20
Ottobre	24.5	33.1	43.0	100.6	71	23.8	10	16
Novembre	123·3	73.6	25.8	**222.7**	109	**65.6**	22	1
Dicembre	68·9	55.9	31.2	156.0	66	48.7	17	6
Totale anno	767.8	306.2	377 4	**1451.4**	761			

Qualità dei giorni. Velocità e direzione del vento. Tabella VI.

Mesi	Giorni			Giorni con								Vento	
	sereni	misti	coperti	pioggia	neve	grandine	temporali	nebbia	brina	gelo	vento forte	Velocità media oraria Cm.	Direzione
Gennaio	12	14	5	6	—	—	—	—	7	12	—	—*	—
Febbraio	6	13	9	9	1	—	—	—	—	4	-	1.629	N 51 E
Marzo	8	15	8	12	—	2	1	3	—	—	4	**2.973**	N 89 E
Aprile	5	19	6	13	—	2	4	—	—	—	1	0.962	S 78 E
Maggio	3	23	5	12	—	—	3	—	—	—	—	**0.344**	S 47 E
Giugno	3	22	5	12	—	—	3	—	—	—	4	1.026	S 76 E
Luglio	5	23	3	16	—	2	5	—	—	—	1	1.230	N 89 E
Agosto	14	16	1	6	—	1	3	—	—	—	2	0.599	N 82 E
Settembre	8	19	3	7	—	—	4	—	—	—	4	0.900	N 83 E
Ottobre	6	18	7	8	—	—	—	4	—	—	1	1 512	N 88 E
Novembre	8	12	10	10	—	—	—	2	1	—	3	0.815	S 26 E
Dicembre	—	22	9	8	3	—	—	1	2	11	7	1.992	N 67 E
Totali e medie annuali	**78**	**216**	**71**	**119**	**4**	**7**	**23**	**10**	**10**	**27**	**27**	**1.274**	N 82 E

* L'anemometro non funzionò per riparazioni.

Evaporimetro - Nebulosità Tabella VII.

Mesi	Acqua evaporata mm.		Media nebulosità (decimi di cielo coperto)			
	quota mensile	massima giornaliera	9h	15h	21h	giornaliera
Gennaio	**29.4**	2.3	3.3	4.4	3.7	3.8
Febbraio	34.3	2.4	6.0	6.3	5.5	5.9
Marzo	40.4	4.2	5.1	5.7	5.0	5.3
Aprile	73.55	6.1	4.1	5.6	5.6	5.1
Maggio	80.9	5.2	5.0	5.7	5.2	5.3
Giugno	110.2	**7.6**	4.1	5.9	6.1	5.3
Luglio	108.15	5.1	3.8	4.9	5.3	4.7
Agosto	**125.2**	6.1	2.0	3.4	1.8	**2.4**
Settembre	91.2	5.8	3.5	4.1	3.7	3.8
Ottobre	51.8	4.0	4.8	4.6	5.0	4.8
Novembre	33.9	2.5	5.5	5.6	5.1	5.4
Dicembre	38.0	2.5	7.7	6.3	5.5	**6.4**
Totali e medie	**817.0**		4.6	5.2	4.8	**4.9**

II.

Rete Termo-Udometrica.

Aviano. Tabella VIII.

Mesi	Temperatura media	minima	giorno	massima	giorno	Acqua e neve fusa — mm.	Giorni sereni	Giorni misti	Giorni coperti	Giorni con pioggia o neve	grandine	brina	nebbia	temporali
Gennaio .	2.27	-7.0	1	10.2	11	46.4	19	6	6	2	—	—	—	—
Febbraio	3.86	-5.0	11	12.0	4	194.8	8	7	13	7	—	—	—	—
Marzo . .	6.73	-0.2	30	16.4	18	222.4	9	8	14	7	—	—	—	—
Aprile .	12.71	0.0	1	26.2	13	163.8	13	3	14	12	2	—	—	4
Maggio .	17.96	4.0	3	30.0	30	152.0	4	18	9	10	1	—	—	6
Giugno	20.21	8.5	3	31.0	20	158·0	4	18	8	9	1	—	—	7
Luglio .	21·32	11.9	15	31.8	31	162.5	7	17	7	7	—	—	—	5
Agosto .	21.87	9.2	20	32.2	3	95.0	25	4	2	5	—	—	—	4
Settembre	16.44	5.0	27	30.4	6	63.0	15	10	5	2	—	—	—	2
Ottobre .	12.50	3.8	28	21.0	7	199.5	9	9	13	5	—	—	—	—
Novembre	8.51	0.0	16	17.8	27	327.8	9	9	12	10	—	—	—	—
Dicembre	2.03	-7.0	31	11.0	2	83.0	7	15	9	3	—	—	—	—
Medie e totali anno	12.20					1868.2	129	124	112	79	4	—	—	28

Collina Tabella IX.

Mesi	Temperatura media	minima	giorno	massima	giorno	Acqua e neve fusa — mm.	Giorni sereni	Giorni misti	Giorni coperti	Giorni con pioggia o neve	grandine	brina	nebbia	temporali
Gennaio .	-2.77	-12.3	25	9.5	30	—	10	18	3	5	—	—	—	—
Febbraio	-2.21	-9.5	11	4.0	2	—	5	13	10	4	—	—	3	—
Marzo . .	0.26	-7.8	31	11.5	18	45.6	6	16	9	8	—	—	10	—
Aprile . .	4.29	-7.8	4	15.6	13	136.7	4	12	14	12	—	—	7	—
Maggio .	9.59	0.0	2.3	21.5	30	116.9	—	25	6	14	—	2	2	1
Giugno .	13.89	4.0	3	24.0	28	89.9	—	25	5	11	1	1	3	6
Luglio .	15.72	5.0	14	23.6	24	200.6	—	24	7	17	—	—	3	11
Agosto .	17.12	6.0	20	25.5	3	155.6	6	20	5	9	2	—	—	6
Settembre	11.81	2.0	25.27	20.2	2	62.6	3	20	7	8	—	5	—	3
Ottobre .	9.27	0.3	28	17.0	9	138.9	7	16	8	6	—	5	7	—
Novembre	4.69	-5.0	22	17.0	25	479.9	5	10	15	13	—	7	11	2
Dicembre	-2.84	-12.0	31	6.5	4	—	2	21	8	4	—	—	2	—
Medie e totali anno	6.57					1426.8	48	220	97	111	3	20	48	29

Gemona Tabella X.

Mesi	Temperatura					Acqua e neve fusa — mm.	Giorni			Giorni con				
	Media	estremi					sereni	misti	coperti	pioggia o neve	grandine	brina	nebbia	temporali
		minima	giorno	massima	giorno									
Gennaio .	2.19	-5.5	2	9.0	9	66.8	19	8	4	3	—	6	—	—
Febbraio	4.05	-3.3	12	9.8	7	208.8	7	12	9	8	—	—	—	—
Marzo . .	6.11	-1.0	23-29	14.8	18	267.7	12	8	11	12	—	3	2	1
Aprile .	11.13	-0.2	1	23.5	13	206.5	12	7	11	14	—	—	—	4
Maggio .	17.77	5.0	2	27.0	30	120.1	6	18	7	17	—	—	—	2
Giugno .	19.58	7.5	3	29.2	18	181.3	4	20	6	13	—	—	—	7
Luglio .	21.22	11.5	14	29.5	26	173.0	7	19	5	14	—	—	—	4
Agosto .	21.80	10.0	19.20	31.0	3	132.5	21	8	2	5	—	—	—	3
Settembre	16.66	4.0	26	28.8	4.8	122.3	12	14	4	7	—	1	—	1
Ottobre .	13.22	2.6	28	20.5	5	198.3	12	2	7	5	—	2	—	—
Novembre	9.14	0.5	16	18.2	25	439.5	11	8	11	11	—	4	1	1
Dicembre	2.50	-6.2	31	11.2	4	128.5	9	12	10	10	—	—	—	—
Media e totali anno	12.11					2245.3	132	136	87	119	—	16	3	23

Latisana Tabella XI.

Mesi	Temperatura					Acqua e neve fusa — mm.	Giorni			Giorni con				
	Media	estremi					sereni	misti	coperti	pioggia o neve	grandine	brina	nebbia	temporali
		minima	giorno	massima	giorno									
Gennaio .	1.93	-6.0	2	9.0	11.15	2.5	17	12	2	3	—	10	—	—
Febbraio	4.38	-4.0	11	10.0	10.25.26 28	57.0	9	15	4	5	—	—	—	—
Marzo . .	6.81	-1.5	31	15.0	10	69.0	9	17	5	10	1	4	6	1
Aprile .	11.19	-1.0	1-4	22.5	13	45.5	13	15	2	8	—	5	—	3
Maggio .	15.87	5.0	3	25.0	15.26.29 30.31	86.0	14	15	2	7	—	—	—	—
Giugno .	19.98	10.5	3.4.5	28.5	19.20.29	64.5	10	19	1	12	—	—	—	7
Luglio .	21.66	12.0	2	29.0	22.24.25	63.5	15	16	—	4	—	—	—	2
Agosto .	21.99	12.0	30	30.5	2.3	37.5	25	6	—	3	—	—	—	5
Settembre	16.79	6.0	26-27	29.0	4	52.0	18	12	—	5	—	—	—	1
Ottobre .	12.99	3.0	28-29	20.0	5.7.9.25	179.0	10	16	5	7	—	—	5	2
Novembre	9.82	0.0	16	18.0	6.7.8	88.0	14	8	8	7	—	5	1	—
Dicembre	2.27	-7.0	31	12.0	1	143.0	14	9	8	8	—	9	—	1
Media e totali anno	12.14					887.5	168	160	79	79	1	33	12	22

Maniago Tabella XII.

Mesi	Temperatura					Acqua e nevo fusa — mm.	Giorni			Giorni con				
	Media	estremi					sereni	misti	coperti	pioggia o neve	grandine	brina	nebbia	temporali
		minima	giorno	massima	giorno									
Gennaio .	1.78	-6.2	2	8.6	9	39.0	15	11	5	3	—	14		—
Febbraio	3.85	-4.5	11	10.6	8	213.5	7	13	8	7	—	5	—	—
Marzo . .	6.17	0.0	30	14.7	17	301.5	7	15	9	12	—	—	3	3
Aprile .	11.04	-1.5	4	21.5	13	172.0	7	15	8	16	—	1	1	3
Maggio .	15.81	4.0	3	26.1	30	186.5	5	22	4	12	—	1	—	8
Giugno .	19·33	9.4	6	28.6	28	107.5	6	16	8	12	1	—	1	8
Luglio .	21.22	12.3	2	30.0	25	181.5	10	15	6	12	—	—	—	8
Agosto .	21.36	10.0	20	31.0	4	82.0	17	13	1	7	—	—	—	6
Settembre	15.94	5.5	26	28.2	8	161.5	12	14	4	7	—	2	—	2
Ottobre .	13.12	3.8	28.29	20.5	7	322.5	3	20	8	5	—	3	1	2
Novembre	8.89	0.0	16	17.0	25	497.5	13	7	10	9	—	10	—	—
Dicembre	2.43	-7.5	31	13.1	1	94.5	2	23	6	8	—	—	—	—
Media e totali anno	11.75					2359.5	104	184	77	110	1	36	6	40

Nazzareno Pierpaoli.

NOTIZIE STATISTICHE

DEL

R.° ISTITUTO TECNICO DI UDINE

RELATIVE ALL'ANNO 1905-1906

Inscrizioni. — Nell'anno scolastico 1905-906 il numero totale degli alunni inscritti fu di 240 di cui 237 allievi ordinari e 3 uditori come risulta dal seguente prospetto.

Classe	Sezioni						Somma
	in Comune	di Agronomia Corso speciale	Agrimensura	Fisico Matematica	Commercio e Ragioneria	Industriale	
I.	68	—	—	—	—	—	68
II.	—	—	10	16	33	4	63
III.	—	—	12	15	24	5	56
IV.	—	2	16	6	21	5	50
	68	2	38	37	78	14	237
						Uditori	3
						Totale generale	240

Scrutinio finale. — Lo scrutinio finale che venne effettuato giusta il disposto del R.° Decreto 13 Dicembre 1904 N. 598 diede i seguenti risultati:

Sezione in Comune		Presenti in fino di anno	Approvati in luglio agli esami di licenza	Dispensati dagli esami	Rimandati alla sessione autunnale
In Comune		68	—	9	59
Agronomia - Corso unico		2	—	1	1
Industriale	II	4	—	1	3
	III	5	—	2	3
	IV	5	3	2	—
Agrimensura	II	10	—	3	7
	III	12	—	—	12
	IV	16	7	3	6
Fisico - Matematica	II	16	—	4	12
	III	15	—	3	12
	IV	6	2	1	3
Commercio - Ragioneria	II	32	—	11	21
	III	24	—	4	20
	IV	20	8	3	9
		235	20	47	168

Esami di promozione. — Si presentarono agli esami di promozione nella sessione autunnale 149 alunni e di essi 86 ottennero la promozione e 63 furono respinti.

I risultati degli esami di promozione in un colle inscrizioni sono messi in evidenza dal seguente prospetto:

Sezioni	Classi	Inscritti		Risultati					
				del I scrutinio			della sessione autunnale		
		in principio di anno	allo scrutinio finale	pro-mossi senza esami	Rimandati		presenti all'e-same	promossi	respinti
					in 1 mate-ria	in 2 o più			
In Comune	I	68	68	9	16	43	59	29	30
Industriale. . . .	II	4	4	1	—	3	3	1	2
	III	5	5	2	1	2	3	2	1
Agrimensura . .	II	10	10	3	2	5	7	3	4
	III	12	12	—	2	10	12	5	7
Fisico-matematica	II	16	16	4	5	7	12	12	—
	III	15	15	3	1	11	12	6	6
Comm.-ragioneria	II	32	32	11	8	13	21	17	4
	III	24	24	4	8	12	20	11	9
Totale . . .		186	186	37	43	106	149	86	63

Esami di Licenza. — I candidati alla licenza furono 49 divisi per sezioni come segue:

16 della sezione di Agrimensura
6 » » Fisico-Matematica
5 » » Industriale
2 » » Agronomia
20 » » Commercio-Ragioneria

È da notare che oltre ai 6 candidati per la sezione fisico-matematica si presentarono altri 4 per la II riparazione, dei quali 2 si licenziarono in luglio e 2 in ottobre. Si presentò poi un quinto candidato che ottenne la licenza in ottobre.

Per la sezione Commercio-Ragioneria oltre ai 20 candidati si presentarono altri 4 per la II riparazione, che si licenziarono pure 2 in luglio e 2 in ottobre.

In totale quindi si presentarono alla licenza $49 + 9 = 58$ candidati.

Il risultato degli esami di licenza è dato dal seguente prospetto:

Sezioni	Presenti in fine di anno	Presenti all'esame	Approvati	Ammessi a ripetere
Agrimensura	16	16	11	5
Fisico-Matematica	6	11	10	1
Commercio-Ragioneria . .	20	24	20	4
Agronomia	2	2	1	1
Industriale	5	5	5	—
	49	58	47	11

Riassumendo risulta, come appare da questi due ultimi prospetti, che dei 235 alunni presenti allo scrutinio finale o candidati alla licenza, 47 vennero promossi senza esami, 20 vennero licenziati in luglio, gli altri rimandati alla sessione autunnale.

Esami di ammissione. — Per l'anno 1905-906 si presentarono all'ammissione alla prima classe 15 candidati dei quali 13 furono ammessi.

Uno chiese l'ammissione alla seconda, due alla terza e 3 alla quarta. Furono tutti respinti.

Licenziati. — Conseguirono la licenza dalla sezione

Agrimensura.

Blasoni Guido da Flambro, Cigaina Tullio da Codroipo, Coletti Francesco da Prato Carnico, De Cillia Carlo da Treppo Carnico, De Franceschi Luigi da Umago, Grassi Mariano da Udine, Locatelli Antonio da Udine, Mazzoli Raffaele da Maniago, Nigris Annibale da Ampezzo, Ragazzoni Ferruccio da Concadirame, Tamburlini Giacomo da Amaro.

Fisico-Matematica

Petrucco Alvise da Cividale, Saporta Leone da Salonicco, Vecile Carlo da Trieste, Angelini Valerio da Roma, Pecile Giulio da Udine, Morocutti Cristoforo da Genova, Vigorelli Aldo da Lecco, Leonarduzzi Mario da Milano, Olivo Maria da Udine, Hakim-Medici Carlo da Parigi.

Industriale.

Chittaro Guido da Udine, Della Vedova Ettore da Udine, Gaio Edmondo da Udine, Provvisionato Marino da Udine, Provvisionato Mauro da Udine.

Commercio-Ragioneria.

Bardusco Marco da Udine, Bombarda Amilcare da Carpacco (Udine), Cosentini Giovanni da Vicenza, Corradini Corradino da Udine, Cozzarolo Antonio da Cividale, Del Pra Gino da Udine, Degli Uomini Giuseppe da Raccolana, Diana Giacomo da Enemonzo, Gentilli Felice da S. Daniele, Gobessi Carlo da Udine, Macchi Giacomo da Gallarate, Pedriali Vittorio da S. Martino di Ferrara, Pellegrini Adolfo da Pramaggiore, Peri Enrico da Milano, Sabot Luigi da Manzano, Venturini Edoardo da Osoppo, Del Torre Carlo da Udine, Ellero Valentino da Tricesimo, Alessi Plinio da Udine, Alberghetti Giuseppe da Treviso, Lorenzetti Pietro da Palmanova.

Premiazione. — Gli alunni che per diligenza e profitto furono meritevoli di distinzione sono i seguenti:

Sezioni	Classe	Cognome e nome	Luogo di nascita
		ESAMI DI PROMOZIONE	
In Comune	I	Fancello Enrico	S. Vito al Tagliamento
Fisico-Matematica	II	Hofmann Enrico	Udine
Commercio-Ragioneria . . .	»	Feletig Emilio	S. Pietro al Natisone
Fisico-Matematica	III	Caldana Domenico	Lecco
»	»	Linassi Leone	S. Vito al Tagliamento
»	»	Zambon Attilio	Oneglia (Portomaurizio
Industriale	»	De Nardi Luigi	Conegliano
Commercio-Ragioneria . . .	»	Vuga Guido	Cividale
		ESAMI DI LICENZA	
Fisico-Matematica	IV	Saporta Leone	Salonicco
Industriale	»	Chittaro Guido	Udine
»	»	Gaio Edmondo	Udine
Agrimensura	»	De Cillia Carlo	Treppo Carnico
Commercio-Ragioneria . . .	»	Del Pra Gino	Udine
» . . .	»	Degli Uomini Giuseppe	Raccolana
» . . .	»	Gobessi Carlo	Udine
» . . .	»	Peri Enrico	Milano
Agronomia	»	Lorenzetti Pietro	Palmanova

Distinzione conseguita
Menzione onorevole in Matematica e Disegno
Menzione onorevole in Tedesco e Disegno
Menzione onorevole in Tedesco
Premio di II grado
» » »
Menzione onorevole in Chimica
Menzione onorevole in Disegno macchine
Menzione onorevole in Chimica
Premio di I grado e licenza d' onore
» » » » »
» » » » »
» » » » »
Premio di II grado
Menzione onorevole in Italiano
Premio di I grado e licenza d' onore
Menzione onorevole in Francese
Premio di II grado

Sezioni	Classe	Cognome e nome	Luogo di nascita	Distinzione conseguita
		ESAMI DI PROMOZIONE		
In Comune	I	Fancello Enrico	S. Vito al Tagliamento	Menzione onorevole in Matematica e Disegno
Fisico-Matematica	II	Hofmann Enrico	Udine	Menzione onorevole in Tedesco e Disegno
Commercio-Ragioneria . . .	»	Feletig Emilio	S. Pietro al Natisone	Menzione onorevole in Tedesco
Fisico-Matematica	III	Caldana Domenico	Lecco	Premio di II grado
»	»	Linassi Leone	S. Vito al Tagliamento	» » »
»	»	Zambon Attilio	Oneglia (Portomaurizio)	Menzione onorevole in Chimica
Industriale	»	De Nardi Luigi	Conegliano	Menzione onorevole in Disegno macchine
Commercio-Ragioneria . . .	»	Vuga Guido	Cividale	Menzione onorevole in Chimica
		ESAMI DI LICENZA		
Fisico-Matematica	IV	Saporta Leone	Salonicco	Premio di I grado e licenza d' onore
Industriale	»	Chittaro Guido	Udine	» » » » »
»	»	Gaio Edmondo	Udine	» » » » »
Agrimensura	»	De Cillia Carlo	Treppo Carnico	» » » » »
Commercio-Ragioneria . . .	»	Del Pra Gino	Udine	Premio di II grado
» . . .	»	Degli Uomini Giuseppe	Raccolana	Menzione onorevole in Italiano
» . . .	»	Gobessi Carlo	Udine	Premio di I grado e licenza d' onore
» . . .	»	Peri Enrico	Milano	Menzione onorevole in Francese
Agronomia	»	Lorenzetti Pietro	Palmanova	Premio di II grado

Tasse scolastiche. — L'ammontare complessivo delle tasse scolastiche pagate dagli allievi nell'anno scolastico 1905-906 fu di L. 23932 ripartite come segue:

per l'ammissione ai corsi	L.	1660
per l'inscrizione ai corsi.	»	17782
per gli esami di licenza e diploma	»	4490
Totale Lire		23932

Materiale scientifico. — Il seguente prospetto indica come vennero distribuite le spese per il materiale scientifico durante l'anno 1906.

Oggetto della spesa	Per esperienze e conservazione (Lire)	Per materiale nuovo inventariato (Lire)
Acquisto libri	—.—	1279.33
Legature e riparazione libri	453.00	—.—
Scuola e gabinetto di agraria	173.29	58.30
Gabinetto di fisica e osservatorio meteorologico . .	515.79	381.00
» e laboratorio di chimica	1295.04	198.00
» di topografia	81.79	565.00
» di storia naturale	135.29	433.00
» di disegno ornamentale e costruzioni . .	206.38	117.50
Meccanica	582.29 (*)	—.—
Varie	25.00	—.—
	3467.87	3032.13
	3032.13	
	6500.00	

(*) Buona parte di questo importo è rappresentato da tavole di disegno fatte eseguire per uso della sezione industriale, tavole che esistono ma che non si iscrissero nell' inventario.

Entrarono a far parte della Biblioteca e del materiale scientifico nel 1906 i seguenti libri e oggetti:

Biblioteca.

Ahrens. — *Scherz und Ernst in der Mathematik* — Leipzig 1904.

Annali dell' Industria e del Commercio 1905 — Atti del Consiglio dell' Industria e del Commercio, Commissione Centrale dei valori per le dogane — Roma 1906 — Dono del Ministro di Agr. Ind. e Comm.

Annali del R. Istituto Tecnico di Napoli — Anno XXIII — Napoli 1906. Dono.

Annali di agricoltura 1906:

1) *L'azione del Ministero in favore della pesca e dell'agricoltura — Atti della Commissione consultiva per la pesca.*

2) *Concorso a premi tra le associazioni mutue della Sardegna.*

3) *Sul bestiame del Montenegro, della Bosnia-Erzegovina e della Dalmazia* — Roma 1906 — Tip. Naz. G. Bertero e C. — Dono.

Annali di matematica pura ed applicata, già diretti da Francesco Brioschi — Serie III, Tom. XII — Milano 1906 — Tipo-Litografia Rebeschini di Turati e C.

Annuario della R. Scuola Superiore di applicazione per gli studi commerciali in Genova — Genova 1906 — Anno scolastico 1905-1906 — Dono.

Annuario della R. Scuola Superiore di Commercio in Venezia per l'anno 1905-1906 — Venezia 1906 — Tip. Success. M. Fontana — Dono.

Annuario del R. Museo industriale italiano di Torino — Anno scolastico 1905-1906 — Torino 1906. — Tip. Cassone — Dono.

Annuario Scientifico ed industriale diretto dal prof. Augusto Righi — Anno XLII 1905 — Milano 1906 — F.lli Treves, editori.

Atene e Roma — Bollettino della Società italiana per la diffusione e l'incoraggiamento degli studi classici — Anno IX, Firenze-Roma, 1905.

Atti del Congresso Coloniale Italiano in Asmara, settembre-ottobre 1905 — pubblicati a cura di Carlo Rossetti — Vol. I e II — Roma 1906 — Unione cooperat. editrice — Dono.

Atti del Consiglio Provinc. 1905 — Tip. G. Seitz — Udine. Dono.

Atti della Accademia di Udine — Anno 1904-1905 — Udine 1906 — Tip. G. B. Doretti — Dono.

Badaloni cav. Giuseppe. — *Le malattie della scuola e la loro profilassi* — Roma 1901 — Soc. editr. Dante Alighieri.

Baldi ing. Federico — *Compendio di meccanica tecnologica per le scuole d'arti e mestieri.* — Torino 1889 — Vol. I e II — Ed. E. Loescher.

Bellio Vittore. — *Le cognizioni geografiche di Giovanni Villani.* — Roma 1903 — Soc. Geog. It. — Dono della Soc. Geog. Ital.

Boggiano Antonio. — *La funzione delle banche in relazione coll'industria ed il commercio* — Vol. I — Torino 1906 — editori F.lli Bocca.

Bollettino della Società Geografica Italiana — Serie IV, vol. VII — Roma 1906.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa — 1905 Firenze — R. Bemporad e figlio — Dono della biblioteca nazionale di Firenze.

Bollettino del R. Comitato Geologico d'Italia — Anno XXXVI (1905) — Tip. Nazionale G. Bertero — Dono.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria — Anno VIII — Torino 1905 Clausen.

Bollettino di matematica — Giornale Scientifico-didattico per l'incremento degli studi matematici nelle scuole medie, diretto dal D.r Alberto Conti — Anno IV 1905 — Bologna Tip. P. Cuppini.

Bollettino ufficiale del Ministero della Istruzione Pubblica — Anno XXXIII, 1906, Roma — Ditta L. Cecchini.

Böttger dott. Guglielmo. — *Principî di analisi chimica qualitativa*, tradotti dal D.r Emilio Gilli — Firenze 1906 — Succ. Le Monnier, editori.

Brambilla rag. prof. Giuseppe. — *Studi e discorsi* — Milano 1906 – Tip. Bizzi, Corno e C. — Dono dell'autore.

Bulletin des Sciences mathématiques — Tome XXIX — Octobre 1905.

Candlot E. — *Ciments et Chaux hydrauliques Paris et Liège 1906* — Editeur Ch. Béranger.

Carnot Hippolyte. — *Mémoires di B. Barère.* — La Haye et Bruxelles — 1842-1843.

Casalini dott. Mario. — *Un ventennio di organizzazione agricola in Francia* — Torino 1906 — Ed. F. Casanova e C.ia

Catalogo della Biblioteca del Ministero di Agric. Ind. e Comm. — Supp. V dal 1 luglio 1904 al 30 giugno 1906 – Roma 1906 — Dono.

Cesàro E. — *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung* — Leipzig 1904.

Cevasco prof. Ferruccio. — *Per una definizione del Banco Modello* — Como 1906 — Tip. Bertolini, Nanis e C. — Dono.

Claude ing. Giorgio. — *L'elettricità alla portata di tutti* — Torino 1905 — Ed. C. Clausen.

Colletta Pietro. — *Storia del Reame di Napoli dal 1734 al 1825* — Vol. I e II — Milano 1906 — Ed. Franc. Vallardi.

Collezione dei campioni delle unità lineari, di volume e di peso già in uso presso varie provincie italiane e di quelle del sistema decimale possedute dal R. Istituto Tecnico di Milano — Milano 1906 — Tip. C. Tamburini — Dono dell' Istituto stesso.

Dalla Vedova prof. G. — *La Società Geografica Italiana e l'opera sua nel secolo XIX* — Roma 1904 — Dono della Soc. Geog. Ital.

De Saint-Germain A. — *Récueil d'exercices sur la mécanique rationelle* — 2^e edition — Paris 1889.

Discorso del Ministro della Istruzione Pubblica (Luigi Rava) *sul Bilancio dell' Istruzione Pubblica, pronunciato alla Camera dei Deputati nella tornata del 30 novembre 1906* — Tipografia Camera dei Deputati — Dono.

Discussion on the Teaching of Mathematics — London 1902.

D'Ovidio Francesco. *Nuovi studi danteschi - Il Purgatorio e il suo preludio* — Milano 1906 — Ed. U. Hoepli.

Enciclopedia chimica — Supplemento annuale — Torino 1906 — Unione Tipografica, edit.

Enseignement (L') matématique — *Revue internationale* — VIII Année Paris — Gauthier Villars — Genève — Georg et C.^{ie} éditeurs.

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften — Leipzig — In via di pubblicazione.

Fassbinder Ch. — *Théorie et pratique des approximations numériques* — Paris 1906 — Editeur Gauthier.

Felcini A. — *Necessità di una riforma della sezione di agronomia negli istituti tecnici* — Iesi 1906 — Dono.

Ferrandi U. — *Lugh emporio commerciale sul Giuba* — Memorie e note Roma 1903 — Dono.

Ferrero Guglielmo. — *Grandezza e decadenza di Roma* — vol. IV — *La Repubblica di Augusto* — Milano 1906 — F.lli Treves.

Fiorini Matteo. — *Sfere terrestri e celesti in Italia* — Bologna 1889 — Tip. Cenerelli — Dono della Soc. geogr. ital.

Fortschritte der Phys k 1904 - III. — Leipzig — Teubner.

Fracassetti prof. Libero. — *Introduzione al volume « L'opera dell'Associazione Agraria Friulana dal 1900 al 1906 »*. — Udine 1906 — Tip. G. Seitz — Omaggio dell'autore.

Franzoni prof. A. — *Le grandi odi storiche di Giosuè Carducci commentate con prefazione sull'opera del poeta* — Lodi 1906 — Tip. Willmant.

Gallesio Giorgio.— *Manoscritto - Viti - Pomona Italiana ossia Trattato degli alberi fruttiferi* — Pisa 1871 (manoscritto) — Dono.

Garuffa ing. Egidio. — *L'Ingegnere* — Manuale per gli ingegneri civili ed industriali — Torino 1903 — Unione tip. editrice.

Gazzetta Chimica Italiana — vol. xxxvi — Dono del Ministero dell'Istruzione Pubblica.

Geikie Archibald. — *Einleitung zu geologischen Aufnahmen* — Leipzig 1906.

Geographisches Jahrbuch xxviii — 1905, ii — 1906, i.

Ghèradame Andrè. — *La Colonisation et les colonies allemandes* — Paris 1905 — Plon Nourret e C^{ie} editeurs.

Giornale Storico della Letteratura Italiana, diretto e redatto da Francesco Novati e Rodolfo Renier — Vol. xlvii e xlviii — Anno xxiv — Torino, Casa editrice Ermanno Löscher 1906.

Giusti Giuseppe. — *Poesie* — vol. unico — Milano 1902 — Soc. editrice Sonzogno.

Gortani Luigi e Michele. — *Flora friulana con speciale riguardo alla Carnia* — Parte i e ii — Udine 1905 e 1906 — Tip. G. B. Doretti.

Gortani Michele. — *Relazione Sommaria delle escursioni fatte in Carnia dalla Società geologica italiana nei giorni 21-26 agosto 1905* — Roma 1905.

— *I Rivoli Bianchi di Tolmezzo* — Perugia 1906 — Dono dell'autore.

Gortani Michele:

a) *Alcuni recenti studi geologici sulla regione friulana* — Udine 1906.

b) *Sopra alcuni fossili neocarboniferi delle alpi carniche* — Roma 1906.

c) *Bibliografia geologica ragionata del Friuli (1737-1905)* — Roma 1906.

d) *Saggio sulla distribuzione geografica dei coleotteri in Friuli* — Udine 1906.

e) *La forma degli strati a Bellorophon della Carnia* — Perugia 1906.

f) *Le piramidi di erosione e i terreni glaciali di Fielis in Carnia* Udine 1906 — Dono dell'autore.

Graf Otto. — *Die Turbinen* (Text und Tafeln) — vol. 2 — Mürchen 1906 — August Loechner.

Haach dott. Ermann. — *Geographen-Kalender - Vierter Jahrgang 1906-1907* — Gotha 1906 — Justus Perthes.

Hamel Ernest. — *Histoire de Robespierre* — Paris 1865 — Tome I et II.

Holleman A. F. — *Trattato di chimica organica. Trattato di chimica inorganica* — II edizione — Milano 1905 e 1906 — Edit. Società editrice libraria.

Histoire de Saint-Just — Bruxelles 1860 — Moline Cans. et C. éditeurs.

Houssaye. — *Galerie du 18e Siécle* — Paris 1858 — 5 volumi.

Intermédiaire (L') des mathématiciens fondè en 1894 per C. A. Laisant et F. Lemoine — Tome XIII — 1906 Paris — Gauthier-Villars.

Istituto Idrografico della R. Marina. Direttore G. Boet. Capitano di Vascello -- *Le segnalazioni marittime* — Genova 1905 — Dono.

Jahrbuch über die Fortschritte der Matematik — begründet von C. Ohrtmann heransgegeben von E. Lampe Band 34 — Berlin 1905 — Reimer.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung der Ergängungsbände I. Band enthaltend: Max Simon, Uber die Entwiklung der Elementargeometrie im XIX Jahrhundert — Leipzig — Teubner 1906.

Jahres-Bericht (LXXXIII) *der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Cultur im Jahre 1905* — Breslau 1906.

Jahres-Bericht (LXXXII) *der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Cultur im Jahre 1904* — Breslau 1904 — G. P. Aderholz — Buchhandlung — Dono.

Journal d'agriculture pratique, année 1906. Redacteur en chef L. Grandeau — Paris, Librerie de la Maison Rustique.

Journal de mathématiques élémentaires (1905 e 1906, 30 année) pubblié per N. Vuibert — Paris — Vuibert e Nony éditeurs.

Landwirtschaflichen (Die) Versuchs - Stationen — Berlin 1906 Band 64.

Lorentz Richard. — *Traité pratique d'Elettrochimie,* Paris 1906 — Edit. Gauthier-Villars.

Löwl Ferdinando. — *Geologie* — Leipzig 1906.

Lunge G. — *Analyse chimique industrielle* — Paris 1906 — Editeurs Dumond et Penat.

Luzio Alessandro. — *Profili Biografici e Bozzelli Storici* — Milano 1906 — Ed. L. F. Cogliati.

Manzoni Alessandro. — *Opere* — Vol. III — *Le tragedie, gli inni sacri e le odi,* a cura di Michele Scherillo — Milano 1907.

Marchesini ing. dott. Giorgio. — *Tavole di sopravvivenza, rendite vitalizie e costituzione di capitali* — Udine 1906 — Dono dell'autore.

Martelli dott. Domenico. — *Metodi e norme delle materie di uso agrario* — Milano 1906 — Ed. Francesco Vallardi.

Mathèsis. — *Recueil mathématique à l'usage des écoles speciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et I. Neuberg* — Troisième Serie — Tome VI — Gand 1906.

Mazzocchi ing. Luigi. — *Calci e cementi* — Norme pratiche ad uso degli Ingegneri, Architetti, Costruttori, Capimastri, ed assistenti di fabbrica — Milano 1906 — Manuali Hoepli.

Memorie storiche cividalesi — Bollettino del R. Museo di Cividale — Anno I, — Cividale 1905.

Meyers Konversations — Lexikon 13° e 14° Band — Leipzig und Wien 1906.

Mitteilungen des K. K. Technologischen-Gewerbe Museums in Wien — Neue Folge XIV Jahrgang 1905 — Dono.

Molinari Tito. — *Il Congegno matematico delle assicurazioni sulla vita* — Roma 1899 — Tip. Löscher.

Mondo Sotterraneo — Direttore Prof. Francesco Musoni — Udine 1905 — Tip. Del Bianco.

Monografia storica dei Porti dell'antichità nella penisola italiana a cura del Ministero della Marina — Roma 1905 — Dono.

Monografia storica:

a) *Laghi, fiumi e canali navigabili.*

b) *Porti marittimi.*

a cura del Ministero dei Lavori Pubblici — Milano 1905 — Tip. Pirola — Dono.

Moore dott. E. — *Tutte le opere di Dante Alighieri nuovamente rivedute* — III edizione — Oxford 1904 — Stamperia dell' Università.

Müller Adolfo. — *Elementi di Astronomia ad uso delle scuole e per l' istruzione privata: Astrometria Astromeccanica Astrofisica Astrocronaca* — 2 volumi — Roma 1904 e 1906 — Edit. Desclèe, Lefebvre e C.

Musoni prof. Francesco:

a) *Contributo alla conoscenza dell'attività morfologica delle correnti marine* — (Uno studio del Dott. B. Rühl).

b) *Per una ristampa delle opere minori di G. Marinelli* — (V. Congresso geografico italiano) — Udine 1906 — Tip. D. Del Bianco — Dono.

Nathan E. — *Vent'anni di vita italiana attraverso l'« Annuario »* — Roma-Torino 1906 — Casa editrice nazionale.

Nentwig (Prof. dott. Heinrich). — *Literatur der Landes und Volkskunde der Provinz Schlesien umfassend die Jahre 1904-1906* — Breslau — G. P. Aderholz, Buchhandlung.

Niccoli ing. prof. Vincenzo. — *Meccanica agraria:*

1. *Lavorazione del terreno.*
2. *Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti* — Milano 1905 — Manuale Hoepli.

Notizie e studi in connessione colla raccolta pubblicata dalla Reale Commissione Colombiana — Roma 1894 — Dono della Società geografica italiana.

Pagani Carlo. — *Uomini e cose in Milano dal marzo all'agosto 1848* — Milano 1906 — Ed. F. Cogliati.

Pampari dott. G. C. — *Prova sulla efficacia concimante del Crüd ammoniacale* — Piacenza 1906 — Dono della Federazione italiana dei Consorzi agrari di Piacenza.

Pascoli Giovanni. — *Miei pensieri di varia umanità* — Messina 1903 — Edit. V. Muglia.

Pascoli Giovanni. — *Poesie:*

a) *Primi Poemetti* — III edizione — Bologna 1904 — edizione Zanichelli.

b) *Canti di Castelvecchio* — III edizione — Bologna 1905 — editore Zanichelli.

c) *Poemi Conviviali* — II edizione — Bologna 1905 — editore Zanichelli.

d) *Myricae* — VII edizione — Livorno 1905 — Giusti Raffaello editore.

e) *Odi ed Inni* — Bologna 1906 — Zanichelli editore.

Pascot Giovanni. — *La vera origine del diritto* — Udine 1905 — Ed. Gambierasi — Dono dell'autore.

Pastro dott. L. — *Ricordi di prigione dell'unico superstite dei condannati di Mantova dal 1851 al 1853* — Milano 1906 — Edit. Cogliati.

Perini Ruffillo, Capitano nel 4.° Battaglione indigeno — *Manuale teorico-pratico della lingua del Tigrè*, pubblicato per cura della Società geografica italiana — Roma 1893 — Dono della Società geografica italiana.

Pesenti ing. Cesare. — *Il cemento armato ed il cemento semi-armato* — Bergamo 1906 — Istituto Italiano d'arti grafiche.

Petermann (Dott. A.) — *Mitteilungen aus Justus Perthes Geographischer Anstalt herausgegeben von prof. Dott. A. Supan* — — 52 Band 1906 — Gotha — Iustus Perthes.

Piazzi Alfredo. — *Questioni urgenti della Scuola media* — Torino 1906 — Ed. F.lli Bocca.

Picard Émil. — *La Science moderne et son état actuel* — Paris 1906 — E. Flamarion éditeur.

Pincherle Salvatore. — *Lezioni di algebra complementare* — Bologna 1906 — N. Zanichelli editore.

Politecnico (Il) — Giornale dell'ingegner Architetto Civile ed Industriale — Anno LIV — Milano — Tipo-Litografia degli Ingegneri, 1906.

Pratical. — *Matematics* — London 1903.

Prost Eug. — *Manuel d'analyse chimique* — Paris 1903 — Ed. Beranger.

Ranzi Giuseppe. — *Il Risorgimento politico italiano nella poesia di Giosuè Carducci* — Bologna 1906 — Ed. Zanichelli.

Reinach Salomone. — *Apollo* — Storia generale delle arti plastiche — Bergamo 1906 — Edit. Istit. ital. arti grafiche.

Riollot J. — *Les Carrés magiques* — contribution à leur étude — Paris 1907.

Rivista d'Italia — Anno IX — Roma 1903 — Proprietà letteraria e artistica.

Rivista geografica italiana diretta dal prof. Olinto Marinelli e Attilio Mori — 1906 — Firenze 1906 — Annata XIII.

Rivista storica italiana, diretta dal prof. C. Rinaudo — volume V — Torino 1906.

Rosi Michele. — *Il Risorgimento italiano e l'azione d'un patriota cospiratore e soldato* — Roma-Torino 1906 — Casa editrice nazionale.

Saccardo P. A. *Sylloge Fungorum omnium hucusque cognitorum* — Vol. XVIII — Padova 1906.

Sannino dott. Antonio. — *Trattato completo di enologia* — volume I — Conegliano 1906.

Scuola (La) dei capomastri presso il R. Istituto Tecnico di Milano — Notizie, norme regolamentari e programmi degli insegnamenti per cura della direzione della scuola — Milano 1906 — Tip. C. Tamburini — Dono.

Smithsonian Report 1904 — Washington 1905.

Società Geografica Italiana:

Da Zeila alle Frontiere del Caffa.

Viaggi di Antonio Cecchi.

Vol. I, II e III — Roma 1885-1886-1887 — Dono.

Società Geografica italiana:

a) *Terzo Congresso geografico internazionale*, tenuto a Venezia dal 15 al 22 Settembre 1881.

Volume I — Notizie e rendiconti.

Volume II — Comunicazioni e memorie — Roma 1882-1884 — Dono.

b) *Statistica della emigrazione italiana all'estero nel 1881 confrontate con quella degli anni precedenti e coll' emigrazione avvenuta da altri Stati* per L. Bodio, Roma 1882 — Dono — Contribuzione al III Congresso geografico internazionale.

Spica dott. Pietro. — *Chimica Medico-Farmaceutica o Tossicologica* — Vol. I — Parte II e I — Feltre 1896 — Tipografia Panfilo Gastaldi.

Statistica della Istruzione Primaria e Normale per l'anno scolastico 1901-1902 — Roma 1906 — Tip. G. Bertero e C. — Dono del Ministero Agric. Indus. e Comm.

Studio Geologico sul materiale raccolto da Maurizio Sacchi; per cura di G. De Angelis d'Ossat e F. Millosevich — Pubblicazione della Società geografica italiana — (2ª spedizione Bottego) — Roma 1900 — Dono.

Tamassia Nino. — *S. Francesco d'Assisi e la sua leggenda* — Padova 1906 — Ed. F.lli Druker.

Treadwell F. P. — *Trattato di chimica analitica* — Primo volume — Analisi qualitativa. — Milano 1905 — Editore Francesco Vallardi.

Vannutelli Lamberto. — *In Anatolia* — Rendiconto di una missione di geografia commerciale inviata dalla Società geografica italiana — Aprile-Agosto 1904. — *I Vilajet Settentrionali* — Roma 1905 — Dono della Soc. Geog. Italiana.

Verhandlungen des III Matematiker Kongresses in Heidelberg 1904.

Viaggio (Il) di Giovanni Miani al Mombuttu — Note coordinate dalla Società geografica italiana con carta — Roma 1875 — Dono.

Vilmorin-Andrieux & C.ie — *Les plantes potagères* — Paris 1904.

Vinassa de Regny e M. Gortani. — *Fossili carboniferi del Monte Pizzul e del Piano di Lanza nelle Alpi carniche.* — Roma 1905 — Tip. F. Cuggiani — Dono.

Vocabolario Tecnico Illustrato — Vol. I — Macchine ed utensili per la lavorazione del legno e del metallo — Milano 1906.

Wagner R., Fischer F. e L. Gautier. — *Traité de Chimie industrielle* — Tome I e II — Paris 1901-1903 — Éditeurs Masson et C.ie

Zech P. — *Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik* — Stuttgart 1906.

Zeitschrift fur den deutschen Unterricht — *Jahrgang 1905-1906* — Leipzig 1906.

Zeitschrift fur mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von I. C. V. Hofmann — XXXVII Jahrgang 1906 — Leipzig 1906 — G. B. Teubner.

Zeuner dott. Gustave. — *Théorie des turbines* — *Hydraulique pratique* — Paris 1906 — Éditeur Dunod.

Gabinetto di Agronomia.

Vaso con filtro per mungitura latte	L.	30.30
Mola pietra montata	»	28.00

Gabinetto di fisica e Ossservatorio meteorologico.

Radio bario cloruro fosforescente	L.	80.00
Interruttore a getto di mercurio	»	225.00
Coherer sensibili.	»	37.50
Elettroscopio di Kolbe	»	23.50
Bollettino Società Sismologica vol. XI	»	15.00

Gabinetto di chimica

Bilancia Tribouschet	L.	48.00
Reagentario in cassetta di legno	»	100.00
Reagentario sopra scaffale	»	50.00

Gabinetto di Topografia.

Livello a vite inclinometrica con annessa livella mobile	L.	565.00

Gabinetto di disegno ornamentale.

Dettagli di architettura	L.	65.00
« Springher » Storia dell'Arte	»	12.50
L'Arte Italiana vol. XV	»	40.00

Gabinetto di Storia naturale.

Macchina fotografica « Ideal »	L.	185.00
Esemplari conchiglie maggiori	»	6.00
» di Spondulus	»	25.00
» Mitra Papalis	»	1.40
» generi vari	»	37.00
Esemplare Natica	»	—.90
Esemplari Oliva	»	9.96
» Cypraea	»	112.00
» »	»	42.00
» Patella	»	5.40
Esemplare Helix	»	—.50
Esemplari vari	»	21.50
» Neritina	»	51.36
	L.	498.02
Sconto	»	65.02
	L.	433.00

Valore del materiale scientifico. Il seguente prospetto raccoglie l'ammontare complessivo del valore del materiale scientifico alla fine dell'anno 1906 avvertendo che giusta deliberazione 4 maggio 1906 N. 1249 della Deputazione Provinciale fu necessario aggiornare il valore del predetto materiale, e quindi, come appare dal prospetto qui riprodotto, il deprezzamento totale ammonta a lire 58028.16.

Numero progressivo	Collezione	Somma alla fine dell'anno		Deprezzamento tecnico provinciale	Valore reale fine 1906
		1905	1906		
1	Fisica	28912,05	29278,05	10106,17	19171,88
2	Osservatorio meteorologico .	3634,60	3649,60	2199,60	1450,00
3	Chimica	29582,00	29780,00	10480,00	19300,00
4	Biblioteca	59166,90	60275,15	18378,98	41896,17
5	Geometria pratica	14928,72	15493,72	6497,00	8996,72
6	Disegno di costruzioni . . .	1308,62	1308,62	488,62	820,00
7	Storia naturale	23633,00	24066,00	1210,58	22855,42
8	Meccanica	13342,83	13342,83	5337,13	8005,70
9	Presidenza	1317,75	1317,75	395,32	922,43
10	Agronomia.	10332,60	10390,90	2124,82	8266,08
11	Disegno ornamentale	6399,99	6517,49	809,94	5707,55
		192559,06	195420,11	58028,16	137391,95

Il materiale scientifico viene messo ad inventario in base al prezzo di costo od al valore di stima a seconda che si acquista e si riceve in dono.

Negli inventari tutto il materiale è diviso in tre grandi categorie che alla fine del 1906 risultarono costituite come segue:

Mobili	L.	3163.85
Materiale scientifico	»	132265.61
Libri	»	59990.65
	L.	195420.11
meno deprezzamento generale	»	58028.16
Valore reale fine 1906 . . .	L.	137391.95

Podere d' Istruzione.

Del Podere d'Istruzione rende particolareggiato conto la relazione nel volume che precede questo pubblicata dall'egregio professore di agraria direttore dell'azienda D.r Zaccaria Bonomi.

Spese per il mantenimento dell' Istituto.

Anno scolastico 1905-906 e cioè da primo ottobre 1905 a tutto settembre 1906.

Personale insegnante.

Presidenza	da 1 ott. a 31 dic. 905	L.	1024.98
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	5269.50
Matematica secondo biennio	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	543.99
Geometria descrittiva, costruzioni e disegno relativo	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	1149.48
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	4010.94
Computisteria e Ragioneria	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	1023.00
	da 1 gen. a 30 ott. 906	»	3631.50
		L.	16653.39

	Riporto . . .	L.	16653.39
Storia	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	957.00
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	3394.17
Lettere italiane . . . . I e II biennio	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	1250.16
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	5312.88
Lingua francese	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	675.00
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2475.00
Lingua tedesca	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	600.00
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2174.94
Geografia	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	675.00
	da 1 gen. a 30 ott. 906	»	2475.00
Meccanica, Tecnologia meccan., diseg. di macch.		»	2200.00
Agraria Estimo e Direzione azienda rurale	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	600.00
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2174.94
Agraria e computisteria agr.	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	183.33
	da 1 gen. a 30 ott. 906	»	1874.97
Matematiche I biennio . . .	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	1023.00
	da 1 gen. a 30 ott. 906	»	3631.50
Esercizi di matematica		»	300.00
Lingua inglese	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	600.00
	da 1 gen a 30 set. 906	»	2174.94
Chimica ed incarico chimica adatta.	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	959.31
	da 15 gen. a 31 lugl. 909	»	1771.00
Fisica	da 1 ott. 905a 30 set. 906	»	1600.00
Fisica industriale		»	900.00
Storia naturale	da 1 ott. a 31 gen. 905	»	600.00
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2250.00
Economia e Scienza delle Finanze		»	1200.00
Economia e legislazione industriale		»	250.00
Diritto e legislazione rurale	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	842.50
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2677.50
Disegno ornamentale	da 1 ott. a 31 dic. 905	»	842.50
	da 1 gen. a 30 set. 906	»	2790.00
		L.	68088.03

Riporto . . .	L.	68088.03
Calligrafia	»	500.00
Topografia e disegno topograf. da 1 ott. a 31 dic. 905	»	549.99
Topografia e disegno topograf. da 1 gen. a 30 set. 906	»	2174.94
	L.	71312.96

Assistenti.

Assistente di agraria e storia naturale	L.	1200.00
Assistente per la chimica	»	1200.00
Assistente per la fisica	»	1200.00
Assistenza fisica industriale	»	500.00
Assistenza chimica industriale	»	500.00
Educazione fisica.	»	500.00

Compensi per maggiore orario.

Computisteria e ragioneria	L.	450.00
Disegno ornamentale	»	300.00
Topografia	»	125.00
Meccanica disegno di macchine, tec. meccanica. .	»	1375.00

Classi aggiunte.

Presidenza	L.	500.00
Tedesco.	»	405.00
Disegno ornamentale	»	600.00
Educazione fisica.	»	50.00
Geografia.	»	750.00
Italiano	»	3150.00
Francese	»	810.00
Matematica	»	1650.00
Storia	»	1000.00
Storia naturale.	»	750.00
Fisica	»	625.00
	L.	88952.96

	Riporto . .	L. 88952.96

Personale non insegnante.

Segretario	L.	1800.00
Bidello-capo	»	941.25
Bidello-primo.	»	1100.00
Bidello-secondo	»	808.32
Totale spese personale	L.	93602.53
Materiale scientifico	»	6500.00
Spese di cancelleria	»	808.04
Esperienze agrarie	»	200.00
Escursioni	»	175.00
Totale generale	L.	101285.57

Di questa spesa stanno a carico dello Stato. . . . L. 54807.01

A carico della provincia:

Somma fissa stabilita dalla legge 12 luglio 1900	L.	29175.95	
Metà compensi classi aggiunte.	»	5145.00	
Stipendio personale non insegnante. . .	»	4649.57	
Materiale scientifico	»	6500.00	
	L.		45470.52

A carico del Comune:

Spese di cancelleria	L.	808.04	
Sussidi per esperienze agrarie	»	200.00	
	L.		1008.04

Ritorna la somma totale di L. 101285.57

La Presidenza.

N.B. Il Comune provvede ai locali ed alla loro manutenzione, al materiale non scientifico, alla illuminazione, etc.

Prof. Cav. Giovanni Nallino

Del professor Giovanni Nallino disse già magistralmente con autorità e conoscenza l'egregio collega dott. cav. Giovanni Del Puppo nella seduta che in onore del compianto estinto tenne la nostra Accademia la sera del 23 marzo 1906, (1) e così bene e completamente ne venne descritta e delineata la figura che parrebbe superfluo tessere una seconda biografia, aggiungere un nuovo elogio. Tuttavia la lunga e del resto ben giustificata consuetudine di ricordare in questi Annali i benemeriti dell'Istituto rende doveroso, come atto di giustizia e di gratitudine verso la sua cara e venerata memoria, che anche da queste pagine si discorra sia pur brevemente di Lui.

Giovanni Nallino, che per ben 34 anni appartenne come insegnante di chimica generale ed agraria a questo Istituto e fu direttore della R. Stazione Agraria che fino alla sua morte vi fu annessa, dovette tutto a sè stesso, alla tenacia dei suoi propositi, alla vasta e svariata coltura scientifica, all'instancabile attività, all'energia tutta piemontese della sua volontà.

Giovanetto fu affascinato dall'amore per la chimica che si esplicò poi tosto in vera vocazione, quella che lo chiamò all'alto ufficio di rivelare ai giovani i secreti e le bellezze di una scienza ricca di attrattive e di utilissime applicazioni.

Egli si aprì la via da solo e visse per la scienza, la cattedra e la famiglia quasi esclusivamente, dedicando il tempo libero a molti ed importanti uffici pubblici a cui la stima e la fiducia dei cittadini lo avevano chiamato.

---

(1) V. Atti dell'Accademia di Udine, Anno 1905-906 — Serie III — Vol. XIII — Udine, Tip. di G. B. Doretti 1907, pag. 21.

La smania così comune al dì d'oggi di porre in mostra il proprio potere e sapere e di cercare coll'arte dei sotterfugi o dei favori degli altolocati di farsi sgabello per salire, gli era affatto sconosciuta, ed in parecchi casi fu anzi necessario spronarlo perchè avesse quello che di diritto gli spettava. Con quella pazienza dei forti che è la costanza, con una operosità meravigliosamente continua egli adempì fino all'ultimo il suo dovere. Buon per lui che dotato di tempra robustissima, con una salute di ferro, potè reggere fino all'età di 70 anni e per 47 di lavoro in servizio dell' istruzione, alle fatiche della scuola, alle cure della Stazione Agraria ed a quelle dei non pochi e talora non lievi onorifici incarichi affidatigli e che scrupolosamente adempiva. Altri di men forte costituzione non avrebbe potuto resistere, gli sarebbe venuta meno la vita. Per lui perdere una lezione sarebbe stata una disgrazia, e se qualche rarissima volta gli avvenne di star lontano dalla scuola per motivi più che plausibili, o si fece sostituire pur a malincuore dall' assistente, a cui impartiva gli ordini più precisi e rigorosi, o rimandava la lezione ad altro giorno, non appena fatto ritorno all' Istituto.

Solo in casi eccezionali, all' infuori del tempo che passava in famiglia, egli era costantemente qui all' Istituto, nel suo laboratorio dove, uscito sempre a tarda ora, assai di sovente ritornava alla sera, prolungandovi la sua dimora fino anche oltre la mezzanotte per occuparsi da solo od a preparare le lezioni del giorno successivo o ad istituire nel quieto silenzio della notte analisi importanti e delicate. E tutto intento al lavoro, fidando nel forte suo fisico, era intollerante di ogni riguardo che valesse a salvaguardare la sua salute. Così, senza precauzioni di sorta, affrontava le differenze notevoli di temperatura negli ambienti del vasto laboratorio, le correnti d'aria dei corridoi, il freddo del cortile, l'atmosfera spesso inquinata da esalazioni men che salubri e forse per questo fu colpito un inverno da una bronchite per la prima volta non molto grave ma che mai non potè debellare del tutto, che si rinnovava nella fredda stagione ogni anno e fattasi poi sempre più acuta gli rendeva difficile il respiro e lo trasse infine, pur troppo, alla tomba.

Nè mai valsero le sollecitazioni amorose della famiglia e degli amici perchè circondasse la sua preziosa salute di tutte quelle cure che l'età e l'indole delle sue occupazioni avrebbero dovuto imporgli.

Nel corso dei 34 anni del suo magistero qui in Udine non chiese mai un giorno di riposo; anche le ferie scolastiche le passava nel suo laboratorio, concedendosi al più lo svago di poche gite nelle domeniche per prender parte a qualche convegno della Società Alpina o per visitare la famiglia in campagna.

Per il dovere non gli pareva mai di fare a sufficienza, voleva da sè bastare a tutto. I lavori della Stazione Agraria andavano sempre aumentando, alcuni di molta importanza esigevano analisi lunghe e delicate, vi si aggiungevano quelli della scuola divenuti gravi pur essi per la cresciuta scolaresca; correva il Nallino serio pericolo di rimetterci la salute, ma egli procedeva impavido, pertinace ad onta delle vive insistenze di chi per il bene suo gli suggeriva di chiedere un aiuto. Tuttavia di tali consigli si teneva come offeso e solo quasi a viva forza dopo lunghe e vive esortazioni e preghiere si adattò ad accettare nel suo laboratorio un secondo assistente.

A titolo d'onore è da citarsi in special modo l'opera da lui prestata, col solito ardore e disinteresse, nelle analisi delle acque per l'acquedotto di Udine, con che contribuì alla felice risoluzione di un problema di tanto momento per la nostra città.

Valoroso insegnante, e per la facile esposizione e per l'abilità grandissima nell'esperimentare, sapeva attrarre vivamente l'attenzione dei giovani, trovare le vie per le quali giungere facilmente alle loro intelligenze e senza essere pedagogista di professione, lo era quasi per natura, per educazione, per l'abito scientifico del suo pensiero.

Severo conservatore della disciplina, pronto sempre ad aiutare di opere e di consiglio, non solo i suoi alunni, ma chiunque a lui si rivolgesse, parco di lodi, alieno dalle facili compiacenze, mitissimo nei giudizi di merito, ebbe dai giovani costante il rispetto e l'affetto di cui specialmente essi diedero ampia testimonianza il triste giorno dei suoi funerali.

Durante la sua vita serbò sempre somma dignità ed indipendenza di carattere, fu di costumi semplici, affabile, cortese, singolarmente tenace nelle sue opinioni che, se gli venivano contrastate, non era disposto a cedere; guai sovratutto se per avventura gli fosse sorto il sospetto che si volesse trarlo per forza a convincimenti non suoi; in tal caso reagiva anche un po' troppo vivacemente perchè gli pareva vedere provocazioni e prepotenze dove talvolta non c'era che semplice diversità di giudizio.

Ebbe il Nallino larga coltura scientifica, ed oltre che della chimica si occupò della botanica nella quale tanto emerse che per parecchi anni ne tenne cattedra presso la R. Scuola di Medicina veterinaria in Torino.

Padre amorosissimo, tutto sacrificò alla educazione ed al bene della prole, ed aiutato in questo dalla donna intelligente ed amorosa che gli fu compagna in tutta la vita, potè goder delle gioie di una splendida riescita, perchè il figliuolo studiosissimo raggiunse presto i più alti gradi nel pubblico insegnamento, e ancor in molto giovane età conseguì il posto di ordinario nella Università di Palermo, e la figliuola, coltissima essa pure, si dedicò con affetto e con pieno successo allo studio delle lingue straniere.

Già abbiamo accennato come, quantunque occupatissimo, sapeva trovar tempo per attendere a pubblici uffici. Noteremo che dell'opera sua si valsero la Società dei Giardini d'infanzia di cui fu sempre segretario solerte, l'Associazione Agraria Friulana che lo ebbe per parecchi anni vice-presidente e poi consigliere, la Società Alpina Friulana da lui prediletta e del cui Consiglio fece parte, la Scuola Popolare Superiore che diresse per due anni nel non facile periodo del suo inizio. Fu membro di molte commissioni tecniche, non poche volte commissario regio agli esami di licenza delle scuole di viticoltura e di enologia, spesso venne consultato in quistioni importanti nelle quali sempre portò quel senso pratico, quel rigore, quel disinteresse che gli erano caratteristici.

Di lui si hanno anche pubblicazioni di valore, ma poche specialmente perchè, modestissimo, amava non mettere in mostra il suo nome. Citeremo il volume: *Guida per riconoscere le falsificazioni delle sostanze alimentari* — *Sulla composizione dei semi del ricino* — *Sulle noci di cocco* — *Sull' Alemites trilobata.* Alcuni scritti negli Annali della R. Stazione Sperimentale Agraria da lui diretta qui in Udine. Articoli diversi in periodici scientifici.

Possano questi brevi cenni, dettati con amore e senza artificio, raccomandare la memoria di quel gran galantuomo, di quell'ottimo padre, di quell'eccellente operosissimo insegnante che fu *Giovanni Nallino.*

Dalla citata commemorazione dell'egregio prof. cav. Giovanni Del Puppo crediamo opportuno togliere le seguenti notizie sulla carriera del compianto professore.

Giovanni Nallino nacque a Cuneo da Costanzo e da Marianna Bellino il 23 agosto 1836. Percorsi gli studi secondari compì i superiori nell' Università di Torino dove nel 1860 fu nominato preparatore di chimica generale. Trasferito l'anno stesso a Pavia, nel '61, in seguito a concorso, venne eletto assistente preparatore di chimica e farmacia nella R. Scuola di Medicina veterinaria a Torino; nel '62 fu nominato Aggregato alla cattedra di chimica con diritto di libero insegnante e di supplenza alla cattedra stessa; nel '63 conseguì il titolo di Dottore aggregato; nel '66 vinse il premio a chi avesse dato il miglior esame di abilitazione all'insegnamento della chimica tecnologica presso la R. Scuola Superiore di Medicina veterinaria dove nei tre anni '70, '71, '72 tenne anche l'ufficio di direttore; nel maggio 1871 venne inoltre nominato assistente presso la R. Stazione Agraria torinese. Dal '65 al '72 fu anche incaricato della botanica nella R. Scuola di Medicina veterinaria ed infine, in seguito a concorso, nello stesso anno 1872, venne eletto professore titolare di chimica generale nel R. Istituto tecnico di Udine e contemporaneamente Direttore della R. Stazione Agraria annessa all' Istituto stesso.

Nel 1862, insieme col Cossa, ottenne un premio per ricerche sul seme di ricino.

Collaborò spesso nella grande Enciclopedia Chimica del Selmi.

M. M.

LA SORTITA DI MARGHERA

(27 ottobre 1848).

Il grande impero austriaco continuava ad essere in piena anarchia anche dopo le vittorie riportate dal Radetzky in Italia e dal principe Windischgrätz sui ribelli boemi. La Costituente, raccoltasi a Vienna il 23 luglio, colla sua inesperienza e coi contrasti, che in essa continuamente scoppiavano tra i rappresentanti delle varie nazioni, non poco contribuiva a mantenere e ad accrescere il disordine. Ma, allorchè il 7 settembre i Deputati sancirono la libertà della proprietà rurale, legge memorabile per cui l'Austria si staccò dal medio evo e divenne uno stato moderno (1), scemò la forza della rivoluzione, perchè i contadini, ottenuto quanto desideravano, cessarono di far causa comune col liberalismo. Da quest' istante la reazione potè lentamente riprendere forza e l'imperatore, ch'era già ritornato nella sua capitale, in un rescritto dichiarò agli Ungheresi, i quali, approfittando degli avvenimenti occorsi nel marzo si erano, si può dire, resi indipendenti dall'impero austriaco, che le cose dovevano tornare nello stato di prima. Com'era prevedibile, gli Ungheresi ricusarono di obbedire, ed il governo, per riuscire nel suo intento, si appigliò al partito di fomentare le pretese all'autonomia, messe in campo dalle varie stirpi abitanti l'Ungheria, e di eccitare specialmente i Croati a ribellarsi. Infatti il ban Jellachich, con un buon nerbo di milizie, passato il confine, si avanzò alla volta di Budapest, con grande indignazione dei patrioti ungheresi, che, acclamato

(1) Flathe Teodoro, *Il periodo della restaurazione e della rivoluzione* pag. 820.

Luigi Kossuth dittatore, si prepararono ad opporre valida resistenza ed ebbero intanto alcuni favorevoli scontri cogl'invasori.

A tale notizia il ministero austriaco ordinò che da Vienna partissero soldati in soccorso dell'Jellachich, ma l'ammutinamento di un battaglione di fanti italiani, che si rifiutarono di muovere contro un popolo, che coi loro connazionali aveva comuni le speranze e i propositi, ed i modi violenti usati dal governo per costringere i sediziosi all'obbedienza furono causa di una sollevazione, che costò la vita al ministro Latour. I ribelli prevalsero, le milizie vennero da loro cacciate e l'imperatore, atterrito, prese un'altra volta la via dell'esilio e si rifugiò ad Olmütz (1). In quel giorno (6 ottobre), nelle vie della capitale austriaca, si inneggiò all'Italia ed a Venezia (2) ed i vincitori s'illusero di aver riportato un trionfo duraturo. In quella vece, appena circa venticinque giorni dopo, quantunque il Kossuth tentasse di recar loro soccorso, furono completamente annientati dal Windischgrätz, accorso con un esercito dalla Boemia (1 novembre).

Ebbero luogo allora crudeli vendette e feroci rappresaglie e soffrirono l'estremo supplizio uomini cospicui, quali Roberto Blum ed i letterati Becher ed Jellinck, che, scrive il Flathe, col loro sangue lavarono le colpe della stampa democratica (3). L'imperatore, trasferita la Costituente a Kremsier e confermate le concessioni fatte anteriormente e le deliberazioni prese dal parlamento prima del 6 ottobre, nominò nuovi ministri, tra cui il cav. De Bruck, geniale creatore del Lloyd, e Felice Schwarzemberg, uomo privo di serietà e sprezzatore degl'Italiani, il quale si propose di domare, a qualunque costo, la rivoluzione e di avvincere di nuovo all'impero i paesi che se n'erano staccati.

Ma il tumulto scoppiato a Vienna il 6 ottobre e le vittorie

---

(1) Belleydier Alfonso, *Storia delle rivoluzioni dell'impero d'Austria negli anni 1848-49*, I.ª versione italiana con aggiunte e annotazioni del Consigliere dottor F. B.

(2) de La Forge, *Histoire de la république de Venise sous Manin*, pag. 148.

(3) op. cit. pag. 850.

riportate dagli Ungheresi inanimirono i nostri patriotti, che un'altra volta s'illusero di poter cacciare gli abborriti stranieri. « L'ottobre, scrisse Francesco Restelli al Manin, non « passerà senza una nuova insurrezione lombarda e così to- « glieremo di mezzo la mediazione (¹) ed i suoi temuti effetti « e si renderà quasi certo l'intervento francese, che scioglierà « la questione dell'indipendenza e della forma politica. Occorre « peraltro che l'insurrezione lombarda sia secondata da quella « delle provincie venete. Il momento è opportuno, essendo « Vienna in rivolta e ardente la lotta fra Ungheresi e Croati, « i quali ultimi nutrono simpatia per la nostra causa. I Pie- « montesi poi, dovranno seguirci » (²). Ed invero, sebbene l'esercito fosse moralmente mal disposto e mancasse di fucili, di sciabole e di baionette (³), il ministro sardo, credendo che il paese desiderasse la guerra e sembrandogli propizia l'occasione, ravvolgeva nell'animo il pensiero di tornare in campo e forse vi si sarebbe deciso, se l'Inghilterra non l'avesse consigliato e la Francia non gli avesse quasi imposto di starsene tranquillo, dichiarando che non soltanto non darebbe alcun aiuto, ma lascierebbe anche invadere il Piemonte dagli Austriaci (⁴). D'altra parte, se in Val d'Intelvi, in Valtellina e nel Bergamasco scoppiò la rivoluzione, dal Restelli preconizzata, essa venne in breve repressa colla forza dal maresciallo Haynau e non valse che a dimostrare, come scrisse lo Sforza-Bissari ad Alessandro Poerio (⁵), che le popolazioni lombarde non erano nè atte ad una sollevazione, nè vogliose d'iniziarla (⁶).

---

(1) Lo scrittore alludeva alla mediazione anglo-francese, avente lo scopo di ristabilire la pace.

(2) Doc. Manin N. 4184 presso il museo Correr in Venezia.

(3) Tivaroni, *L'Italia settentrionale durante il dominio austriaco*, I, pag. 290.

(4) Bonghi, *Valentino Pasini e i suoi tempi*, pag. 376.

(5) Imbriani Vittorio, *Alessandro Poerio e Venezia*, pag. 339.

(6) Il Restelli, invece, dando relazione del fatto al Manin, dopo aver detto che la precocità dei moti insurrezionali di Valle Intelvi e della Valtellina aveva contrariato la rivolta generale, non dubitò di affermare ch'essi avevano dimostrato l'eccellente spirito delle popolazioni (Lettera al Manin. Doc. Manin 4185) e che, per liberare la patria, ci volevano eserciti e cannoni, non parole e poesia. (Cfr. pure Ottolini Vittore, La rivoluzione lombarda del 1848-49, pag. 335 e seguenti).

In questo mezzo, il governo veneziano lottava tottodì con gravi difficoltà finanziarie, tanto che, *mentre con fede fraterna attendeva generosi ed efficaci soccorsi dalle città italiane*, fu obbligato ad imporre un nuovo prestito forzato di due milioni di lire, che vennero ripartite fra cento cinquanta cittadini, che non avevano contribuito al primo. Una Commissione, composta di nove membri, fu incaricata di designarli ed i Triumviri dichiararono che non terrebbero alcun conto dei reclami, che fossero, per avventura, presentati contro la scelta fatta da quella (1). Ma le notizie di Vienna valsero a confortare anche i Veneziani ed il Manin, il quale, credendo in buona fede che il congresso proposto dagli stati mediatori ed accettato dal governo imperiale, si raccogliesse in breve, scrisse al Pasini che la completa indipendenza del Lombardo-Veneto doveva essere sostenuta con maggiore energia e fermezza e che l'esclusione di un principe austriaco potrebbe venir comperata coll'assunzione di una parte maggiore del debito pubblico o con trattati commerciali favorevoli. « Che se, aggiunse egli, la « Lombardia, lasciata libera di unirsi al Piemonte, preferisse « formare con questo un solo stato, per un giusto equilibrio « politico, sarebbe necessario allargare i confini del territorio « veneto e precisamente determinarli ai punti, dove si trova- « vano prima del trattato di Campoformio. Fa d'uopo combat- « tere e respingere l'isolamento di Venezia, cioè la creazione « di essa in città anseatica, ed accettare questo partito solo « nel caso che le s'imponesse la soggezione diretta o indiretta « colla terraferma all'impero » (2). In verità noi, che abbiamo sott'occhio tutti i documenti riguardanti la storia del 1848, non riusciamo quasi a comprendere come il Manin potesse nutrire l'illusione che, dopo le vittorie del Radetzky, dovesse esser prossima l'ultima ora della dominazione austriaca in I-

(1) Decreto 12 ottobre 1848 in Raccolta per ordine cronologico di tutti gli atti, nomine ecc. del governò provvisorio della repubblica veneta, Vol. IV, pagine 298-299.

(2) Disp. 13 ottobre '48 in Federica Planat de la Faye, *Documenti e scritti autentici lasciati da Daniele Manin,* Vol. II, pag. 51-54.

talia; ma, per rendercene ragione, dobbiamo sempre tener presente al pensiero il fatto che i governanti francesi continuavano a largheggiare di belle parole e di promesse coi rappresentanti veneziani. Proprio in questi giorni il Cavaignac, dopo aver assicurato il Tommaseo che il comandante delle navi francesi, spedite nelle acque di Venezia, aveva avuto l'ordine d'intimare all'ammiraglio anstriaco di non molestare la città e di assalirlo in caso di rifiuto, gli disse: « I Vene-« ziani perseverino e facciano sacrifici, perchè sono adesso « assai lontani dal cadere » ed il Bastide, del canto suo, aggiunse: « Abbiate fiducia, io amo Venezia, perchè la gente che « non cede mi piace; se essa ritornasse in potere dell'Austria « io mi ritirerei ([1]) ». È ben vero che i due statisti francesi non intendevano con tali detti di garantire l'indipendenza veneziana e mutavano linguaggio ad ogni istante, perchè, come, del resto, era naturale, informavano il loro contegno agl'interessi della Francia e alle vicende generali della politica europea ([2]), ma non è meno vero ch'eglino, volenti o nolenti, contribuivano in tal modo a tener viva nel cuore del Manin e dei patrioti italiani in generale la speranza che tutto non fosse ancora perduto. Anche il naufrago, errante nel mare interminato, sul punto di darsi alla disperazione, se scorge lontano nell'orizzonte la terra vagheggiata, si rianima e nuota verso di essa con maggior lena, fiducioso di raggiungerla e di adagiarvi le membra spossate. In quella vece, le sorti della misera Italia volgevano sempre più alla peggio, ed il 13 ottobre anche il presidio della rocca di Osoppo, di questa vigile sentinella delle Alpi ([3]), dopo aver onorevolmente e validamente non solo resistito alle soldadesche austriache numerose

---

([1]) Disp. del Tommaseo 12, 23 e 24 ottobre 1848 in Planat de la Faye, op. cit. Vol. II, pag. 54-55 e 62-63.

([2]) Stamane, scrisse il 25 ottobre il Tommaseo, le notizie di Vienna sono « sfavorevoli e il ministero francese è in grave paura. Il Bastide, che dianzi con-« sigliava d'insorgere, ora sconsiglia e dice chiaro che nulla abbiamo a sperare « di qui ». (Disp. in Planat de la Faye, op. cit. Vol. II, pag. 63).

([3]) Cfr. Fracassetti Libero. *Per la resistenza del forte di Osoppo nel 1848.* Discorso commemorativo Udine, Tip. Del Bianco 1898.

e forti, ma riportato su quelle brillanti vittorie, fu costretto a firmare una decorosa capitolazione ed, in tal modo, su tutte le terre lombardo-venete, ad accezione di Venezia, sventolò di nuovo il vessillo austriaco (1). La caduta di quel baluardo della libertà nazionale commosse sinistramente i Veneziani e specialmente il Cavedalis, il quale, tuttavia, d'accordo coi suoi colleghi, confidando sempre nei disordini interni, ai quali era in preda l'Austria, decise di abbandonare la politica di aspettazione, seguita fin qui e di attaccare i nemici. Si diceva che la Lombardia e il Veneto fremessero sotto il giogo e spiassero con ansia l'istante opportuno per tentar di scuoterlo un'altra volta dal collo; che il Radetzky fosse assai impensierito, perchè gli Ungheresi militanti sotto di lui avevano tumultuato in Milano e gridato: Morte ai Croati (2); che il Piemonte, come notammo, non fosse alieno dallo scendere di nuovo in campo; che, insomma, non ci volesse che una scintilla per riaccendere un terribile incendio. Inoltre, in Venezia stessa non mancavano eccitamenti al governo, perchè, in cambio di tenere i soldati inoperosi, li mandasse alla battaglia e alla vittoria (3), ed il Tommaseo da Parigi consigliava il Manin ad ordinare ai legni veneziani di dare addosso ai Triestini, affermando « che un mezzo trionfo navale sarebbe stato un lume dall'alto » (4); infine, non era forse urgente sforzarsi di rompere in qualche modo il blocco, che, da due mesi, stringeva la città come in un cerchio di ferro? Perciò i Triumviri cominciarono col dare facoltà alle navi veneziane di assalire qualche barca nemica e d'impadronirsene (5); poi volsero l'animo a preparare una

---

(1) Cavedalis Giovanni Battista. *Commentari pella storia della guerra degli anni 1848-49 presso il museo Correr in Venezia,* libro IV, pag. 491. Jäger Edoardo, *Storia documentata dei corpi volontari veneti.* « Solo a Venezia, scrive « Giovanni Visconti Venosta, sventolava ancora incolume e gloriosa la bandiera « tricolore e gli occhi di tutti erano rivolti ad essa con malinconica compiacenza « e con una vaga speranza ». (Ricordi di gioventù, pag. 188).

(2) Raccolta ecc. IV, 363.

(3) Raccolta ecc. IV, 347.

(4) Doc. Manin 2312.

(5) Martin Henri, *Daniel Manin*, pag. 184.

qualche spedizione terrestre, procurando peraltro che nulla ne trapelasse tra il pubblico, perchè molti erano nella città gli spioni austriaci, volontari o pagati. L'esercito veneziano si componeva allora di circa ventimila uomini, ma si poteva, per una fazione campale, fare assegnamento appena su poco più di diecimila. Pure il Cavedalis, deciso a compiere qualche cosa ed inanimito anche dal fatto che il 17 ottobre un distaccamento di volontari della legione Padovana e Vicentina, stanziata a Grassabò oltre Burano, aveva tolto ai nemici una barca, che avevano predato, e, due giorni dopo, aveva respinto un loro drappello [1], ordinò ai cacciatori del Sile, comandati dal colonnello D'Amigo, di compiere, il 22, una sortita vigorosa da Treporti. La sera del 21 una schiera di quattrocento uomini s'imbarcò alle Fondamenta nuove ed il Cavedalis, fatta spargere voce ch'essa si recava a Marghera, per rinforzare quel presidio, la mandò alla volta del villaggio di Cavallino, dal quale, sotto la direzione del colonnello Ulloa, capo dello stato maggiore del Pepe, doveva tentar di sloggiare gli Austriaci, i quali lo occupavano in numero di circa trecento e l'avevano munito con tre pezzi di cannone. Il luogo, poi, è forte anche per natura, poichè ad esso si accede solamente per un argine, sul quale due uomini di fronte a stento possono avanzare, ed a sinistra è cinto da terreno intersecato da siepi e da corsi d'acqua, e a destra dal canale Pardelio, nel quale erano a guardia due battelli armati di spingarde [2]. Sostenuti da tre piroghe, da una barcaccia e da un bragozzo, i quattrocento soldati veneziani mossero all'attacco, sebbene piovesse a dirotto, e riuscirono ad impossessarsi del villaggio, di due pezzi di artiglieria, delle provvigioni e di qualche barca. Nella mischia un solo tra essi fu ucciso ed un altro ferito, mentre, a quanto si disse, gli Austriaci lamentarono la perdita di quindici uomini [3]. « Questi primi trofei, scrive il Cavedalis, riu-

---

[1] Cavedalis, op. cit. libro IV, 340.

[2] Carrano Francesco, *La difesa di Venezia nel 1848-49.*

[3] Noaro Agostino, *Dei volontari in Lombardia e nel Tirolo e della difesa di Venezia nel 1848-49,* pag. 102-103; Radaelli, *Storia dell'assedio di Venezia,*

scirono graditissimi al popolo e alla milizia [1] ed il 23 fu giorno di festa a Venezia, dove si trasportarono i cannoni conquistati. I vincitori, passati in rivista dal Pepe, vennero altamente lodati, onde tutti furono allora presi dal desiderio di conquistarc nuovi allori e di dare nuove e maggiori prove del loro valore. Cavallino, nota il Carrano [2], era un posto importantissimo per noi, perchè, dominando esso la foce del Sile e del Piave, avremmo potuto minacciare il nemico alla sinistra della linea di blocco, nè meno importante sarebbe stato occupare Cavanella, la quale signoreggia il Polesine e, pel Brenta e per il Bacchiglione, dà modo di minacciare anche il Padovano e il Vicentino. Cavanella e Cavallino sono i due punti estremi del naturale arco di difesa della laguna, punti fortissimi nella circostante terraferma, opportuni per trarre viveri dai vicini paesi e per proteggere una sortita. I Veneziani, sfortunatamente, non furono in grado di tenerli, per mancanza di uomini, ond'essi rimasero sempre in potere del nemico con quale e quanto danno della città non è chi facilmente non comprenda. Del resto il 22 ottobre 1848 i nostri, attaccando Cavallino, si proposero soltanto l'intento di richiamare l'attenzione degli Austriaci sui punti più lontani dall'estuario, con la mira di assalire poi qualche luogo vicino alla terraferma. Infatti il Cavedalis, nella notte dal 26 al 27, stabilì di compiere una sortita dal lato di Fusina. Il piano venne ideato dal maggiore Radaelli, che conosceva, meglio d'ogni altro, il terreno su cui dovevasi combattere [3], ad in-

---

pag. 245-247; Raccolta ecc. IV pag. 403-404. L'eroe della giornata fu Enrico Cosenz, che il Pepe abbracciò tra gli applausi delle milizie e della popolazione. (Cfr. De Mayo, Per un monumento ad un glorioso artigliere, in Rivista di artiglieria e genio, XIXª annata, Vol. I, 1902).

[1] Op. cit. libro IV 345. Secondo il Morandi, che, del resto, nel suo volume si mostra costantemente ostile ai Triumviri, l'occupazione di Cavallino sarebbe stata compiuta soltanto allo scopo «di distogliere la guarnigione e le milizie dal-«l'intrattenersi sullo sfratto dato ai principali membri del Circolo italiano e su «altri spiacevoli argomenti, che seriamente compromettevano il governo.» (Il mio giornale dal 1848 al 1850, pag. 403).

[2] Op. cit. 61-62.

[3] Radaelli. *Storia dell'assedio di Venezia*, pag. 248.

saputa del Consiglio di difesa e dello stesso Pepe [1], che pur doveva metterlo in esecuzione; ma non ne fu informato che la mattina del 26, perchè nulla ne sapessero quegli esaltati che lo circondavano, i quali reputavano di poter trattare nei circoli o discutere sui giornali anche le operazioni guerresche; « inoltre, aggiunge il Cavedalis, il generale avvicinava molto « l'aristocrazia, dove collo spirito e con la perspicacia del ve- « neto bel sesso disvelare ed indovinare poteasi ciò che per « la riuscita importava rimanesse segreto sino all'ultimo i- « stante » [2]. Una piccola schiera dei nostri doveva da Fusina spingersi al ponte della Rana ed avanzarsi quanto più fosse possibile verso la ferrovia, mentre la schiera principale sarebbe uscita innanzi il sorgere dell'alba da Marghera, ed alcuni piccoli legni, comandati dal capitano di fregata Basilisco, ebbero l'incarico di trasportare le milizie e di proteggerne con le artiglierie lo sbarco. « La sera del 26, scrive il Santalena [3], « sonata la ritirata, tutti gli ufficiali ed i soldati, formanti la « guarnigione del forte, eransi ridotti ai luoghi di riposo, « quando si sparse la nuova che il dì dopo si sarebbe eseguita « una sortita. Tutti ne furono lieti ed in ognuno traspariva la « gioia di combattere per l'indipendenza agognata e per la « grande patria italiana, che si voleva redenta ». Poche ore più tardi, i bravi soldati videro appagati i loro voti, ma la fitta nebbia, che avvolgeva la laguna e la campagna circostante, ritardò alquanto il principio della fazione, che cominciò soltanto alle sei del mattino. Ad essa parteciparono circa duemila uomini, scelti tra i volontari delle varie regioni della penisola, e pochi militi di guardia civica e furono tutti divisi in tre drappelli, di cui il primo, comandato dal colonnello D'A-

---

(1) Vittorio Rovani invece afferma che la sortita di Mestre fu fatta per consiglio e volontà espressa del Pepe « che volle contentare lo slancio generoso dei prodi che si erano raccolti intorno a lui », (Di Daniele Manin Presidente e Dittatore della repubblica di Venezia, pag. 110).

(2) op. cit. libro IV, 349.

(3) A. Santalena, *I Trivigiani alla sortita di Mestre*, Treviso, tip. Zoppelli, 1886, pag. 23.

migo, il secondo dal Morandi (1) e il terzo dallo Zambeccari. Il combattimento fu aspro, perchè gli Austriaci si difesero con grande energia, ma i nostri, animati dallo stesso Pepe, che cavalcava un alto cavallo bianco, con in capo un gran cappello a piume pure bianche, dal Rossaroll, dal Sirtori, dal Cattabene, dal Noaro, dall'Ulloa, dal Cosenz, dal Carrano e da altri prodi riuscirono a respingerli e a costringerli a ricoverarsi a Mestre. Qui peraltro, asserragliatisi in alcune case, tennero nuovamente testa e, poichè gli assalitori l'ebbero prese d'assalto ad una ad una, si trincerarono nella piazzetta dei Quattro Cantoni, decisi ancora a vender cara la vita ed a contrastare sino all'estremo la vittoria. « Ed invero, nota « il Cavedalis, potevano sperare di riuscir nell'intento, poichè « le nostre file erano scomposte, come suole dei volontari, ri- « soluti, ma intolleranti dell'ordine e dell'obbedienza prolun- « gata » (2). Gli ufficiali peraltro, riordinatili, seppero assicurare i buoni successi sino allora riportati o, per dir meglio, renderli più splendidi, perchè il nemico volse completamente in fuga, abbandonando la borgata (3). I nostri occuparono anche l'alloggiamento del generale Mittis e s'impossessarono della sua cosrispondenza e delle sue carte, tra le quali se ne trovò una in cui leggevasi: « Il generale, comandante la bri- « gata, alle sei pomeridiane del 26 ottobre, venne a sapere che

(1) Il Morandi si vanta di aver mutato il piano d'attacco, che gli era stato imposto e di aver, in tal modo, molto contribuito alla vittoria (op. cit. pag. 423 e seguenti). Di tale avviso non fu peraltro il Pepe, il quale, prendendo occasione dal fatto che il Morandi aveva pubblicato per le stampe una *sua relazione incompleta ed inesattissima* sulla spedizione, ottenne dal Consiglio di difesa che gli fosse tolto il comando della fortezza di Marghera. (Histoire des révolutions et des guerres d'Italie, pag. 472 e seguenti).

(2) op. cit. libro IV, pag. 369.

(3) Noaro, op. cit. pag. 105 e seguenti. Memorie patriottiche di un superstite della sortita di Marghera e di Mestre, pubblicate in occasione dell'inaugurazione della colonna ricordante il memorando fatto, Treviso 1886, tip. Pescedel; Angelo Dalmedico, *Commemorazione della sortita di Marghera*, Venezia tip. dell'Adriatico; Pepe op. cit. pag. 185-188; Carrano op. cit. pag. 70 e seguenti; Radaelli, *Storia dell' assedio di Venezia*, pag. 250 e seguenti; Raccolta ecc. IV, 439-440; De Mayo, op. cit.

« le truppe venete faranno domani una sortita da Marghera « su Mestre ». Ci fu dunque un traditore? Il Carrano (1) e Celestino Bianchi (2) credono che sì e non dubitano di designarlo nella persona del comandante della piazza Agostino di Jouy, vecchio ufficiale dell'esercito austriaco, il quale, allorchè l'aquila bicipite fu di nuovo innalzata sulle antenne di S. Marco tornò agli stipendi dell'impero; ma il Radaelli non condivide quest'opinione, sebbene, aggiunge egli la condotta posteriore del di Jouy possa avvalorare il sospetto (3). Il Cavedalis poi non ricorda nè pure quell'ufficiale ed anzi sostiene che tradimento non vi fu. Ed invero, per predisporre la sortita, furono necessari alcuni preparativi, che non dovettero sfuggire nè agli assedianti, nè ai molti esploratori e partigiani, ch'essi avevano in Venezia. D'altra parte, lo stesso governo veneziano mandò alcune sue spie nel campo nemico e quanta fede si possa riporre in tal sorta di gente, che spesso serve all'uno e all'altro dei combattenti, non è chi non sappia (4). Si potrebbe anche accogliere l'opinione di Alessandro de Giorgi (5) che cioè sia caduta in mano del Mittis una copia di quei foglietti a stampa, che il 26 ottobre vennero sparsi destramente nella vicina terraferma allo scopo di suscitarvi qualche tumulto, atto ad agevolare l'impresa meditata. In ogni modo sembra ch'egli ne abbia avuto soltanto qualche cenno vago ed inesatto, perchè ignorò il vero punto, dal quale gli assediati avrebbero cominciato l'attacco, tanto è vero che non prese alcun provvedimento di valida difesa, nè si curò di chiedere rinforzi a Padova, nè di chiamare da Treviso lo squadrone di cavalleria, che stava sotto i suoi ordini e che, scrive Ema-

---

(1) op. cit. pag. 70-71.

(2) *Venezia e i suoi difensori*, pag. 106-107. Anche il Morandi (op. cit., pagine 464-66) riporta che molti a Venezia parlavano di tradimento e non dubita di affermare che forse il segreto della spedizione disegnata possa esser stato scaltramente strappato al Cavedalis da una sedicente principessa russa, od al Pepe da una contessa, di cui si era invaghito.

(3) *Storia dell'assedio di Venezia*, pag. 256.

(4) Carrano, op. cit. pag. 71.

(5) *Venezia nel 1848-49*, pag. 30-31 (in Archivio Veneto, Tomo XI).

nuele Cicogna ([1]), sarebbe bastato a metter giudizio a duemila dei nostri fanti, benchè valorosissimi. Lo stesso de Giorgi, invece, reputa che il Mittis conoscesse tutto il piano primitivo della fazione, poichè una parte delle milizie veneziane, che, uscite da Marghera, s'avviarono dirette a Mestre senza passare all'altra sponda del canale, che dalla fortezza corre alla borgata, trovarono in agguato nelle prime case una mano di Austriaci, pronti a correre su Marghera, se fosse stata lasciata senza difesa ([2]). Fortunatamente detto piano, secondo il quale tutta la guarnigione del forte doveva passare il canale e correre verso Mestre e qui unirsi alla schiera, che veniva da Fusina, fu all'ultimo momento modificato col far avanzare per le due vie ai lati del canale le milizie ch'erano in Marghera, essendosi intravveduto il pericolo che, restando quella custodita da pochi soldati civici, i nemici avrebbero potuto impossessarsene con un colpo di mano. E, poichè, per riuscire in tale intento, non erano necessarie grandi forze, il Mittis, fiducioso di poter da solo riportare una brillante vittoria, non si curò di chiedere rinforzi alle città vicine. Certo è che il povero generale, il quale, per soprassello, era ungherese, venne, quattro dì dopo, surrogato dal suo collega Gess e, breve tempo più tardi, fu collocato a riposo. Riportata la bella vittoria, il Pepe, consenzienti tutti i capitani, se si eccettuino il Radaelli e il Morandi ([3]), ordinò la ritirata, perchè comprese essere impossibile che le milizie veneziane potessero rimanere in possesso di Mestre, dove gli Austriaci le avrebbero il dì dopo attaccate con forze quadruple. Non ha quindi alcun fondamento di verità l'affermazione del Rovani ([4]) « che il Cavedalis « non abbia appreso volentieri la felice riuscita della spedi- « zione, perchè, avendo comandato ai vincitori di ritirarsi tosto « entro i forti e in Venezia, tolse loro il mezzo di profittare « della vittoria e diede così a quella sortita luminosa, che po-

---

([1]) Diario presso il museo Correr.
([2]) op. cit. pag. 31.
([3]) Radaelli, op. cit. pag. 254.
([4]) op. cit. pag. 111.

« teva essere principio di grandissime cose, apparenza di un'i-
« nutile manovra militare ». Ma l'illustre autore reputava forse al pari del valoroso colonnello Morandi, che il governo veneziano potesse inviare diecimila uomini sino a Trieste, mentre invece, come abbiamo detto, le forze, di cui esso disponeva, erano assai scarse e, non ordinate, nè atte ad affrontare un forte esercito nemico (1). In ogni modo, in quel giorno memorabile, dei nostri caddero duecentoquarantaquattro (2) e gli Austriaci lasciarono sul campo circa duecento dei loro (3), e ne perdettero altri cinquecentosettantacinque, i quali furono fatti prigionieri (4). Vennero inoltre in potere dei Veneziani cinque cannoni, alquanti cavalli, molte munizioni e qualche centinaio di lire (5), perchè eglino, contenti della gloria ottenuta, non si curarono nè pure di fare incetta di vettovaglie (6).

Non v'ha scrittore poi, il quale non riconosca che tutti si comportarono con sommo valore e che gli umili gregari gareggiarono coi capitani e col generale supremo, onde questi, ben a ragione, nel suo ordine del giorno dichiarò « ch'era im-
« possibile notare particolarmente i nomi di coloro che si erano

(1) « Non abbiamo, scrive il Cicogna, un'organizzazione tale che permetta di « operare militarmente alla sicura ».

(2) Il Manin, in una lettera al Tommaseo (Planat de la Faye op. cit. Vol. II, pag. 67) scrisse che i Veneziani lamentarono 34 morti e 72 feriti. Il Radaelli (*Storia dell' assedio di Venezia* pag. 255) crede che i morti abbiano superato la sessantina e molti più sieno stati i feriti.

(3) Così il Manin nella lettera citata al Tommaseo, mentre invece il Radaelli (Storia dell' assedio di Venezia pag. 254) afferma che gli Austriaci perdettero tra morti e feriti 350 uomini e l'autore dell' opera *Der Felzug der österreichischen Armée in Italien* dice soltanto che i Veneziani presero la borgata, fecero 557 prigionieri e s'impadronirono di tredici cannoni e di un carro con munizioni.

(4) « Il gran numero dei prigionieri austriaci, scrisse il Dawkins (Disp. 30 « ottobre 1848 al Palmerston in De La Forge Anatole, *Histoire de la republique « de Venise sous Manin*, op. cit. Vol. II, pag. 367-368) si spiega col fatto che « molti sono stati sorpresi nelle case e circondati da forze superiori. Essi, nota « il Cicogna, furono trovati in possesso di denaro e di gioie, ma senz' armi, perchè « nella mischia le gettavano in acqua o le nascosero ». (Diario citato).

(5) Il Noaro dice che i suoi soldati vennero in possesso di tremila lire (op. cit. 121).

(6) Renier Giovanni, *La cronaca di Mestre degli anni 1848-49*, pubblicata da Angelo Marchesan, pag. 103.

« segnalati, poichè lo slancio e l'entusiasmo erano stati nel « petto di ognuno ». « Nella giornata del 27 ottobre, nota il « Renier, uomini di recente milizia, in piccolo numero e senza « artiglieria, fecero prodigi (1), poichè, osserva l'Autore ano- « nimo dell'assedio di Venezia, dimostrarono tale valentia da « onorare i più provetti soldati » (2). Dal canto nostro, agli ufficiali già ricordati, ci accontenteremo di aggiungere il tenente di vascello Francesco Baldisserrotto, che primo discese arditamente sulla spiaggia di Fusina; (3) il monaco Ugo Bassi, che, per amministrare i conforti della religione ai morenti si espose a tutti i pericoli della battaglia, e due fanciulli, che, a detta del Martin (4), compirono gesta simili a quelle per le quali meritamente s'illustrarono i fanciulli eroi della rivoluzione francese. Uno di loro infatti, in età di quattordici anni, per nome Giovanni Battista Speciali, tamburino della guardia civica, durante tutto il combattimento, alla testa del battaglione lombardo, che fu il più esposto al fuoco, battè impavido la carica ed, allorchè il suo camerata cadde colpito da una palla, caricatosi il tamburo di lui sulle spalle, continuò ad avanzarsi come si trattasse di muovere ad una festa. L'altro, il dodicenne Antonio Zorzi, mozzo di una piroga, si gettò nell'acqua per ricuperare la bandiera, che un colpo di cannone aveva abbattuto, e la rimise al suo posto in mezzo ai fischi dei proiettili, gridando: Viva l'Italia (5).

Ma tra coloro che diedero prova di maggiore intrepidezza nel gloriossimo fatto d'armi di Mestre e che, morendo, attestarono al mondo che l'Italia era degna di essere qualche cosa più di un'espressione geografica, ci spetta l'obbligo di rammentare Alessandro Poerio, che, sebbene debole, infermiccio,

---

(1) op. cit. pag. 103.

(2) pag. 51.

(3) Randaccio Carlo, *Storia delle marine militari italiane del 1750 al 1860*, Vol. I, pag. 157.

(4) op. cit. pag. 186.

(5) « Gazzetta di Venezia », 1 novembre 1848. Sulla sortita di Mestre leggi i bei sonetti XXIV - XXIX del prof. L. Vianello (Assedio di Venezia 1848-49, Venezia, Scarabellin, 1903).

miope e sordo, era entrato semplice soldato nello stato maggiore del Pepe, allorchè questi aveva avuto il comando delle schiere napoletane, che avrebbero dovuto combattere contro gli Austriaci. Il 27 ottobre, avanzandosi tra i primi, fu colpito da una palla fredda di moschetto alla gamba destra. Non si sgomentò e al grido di Viva l'Italia, continuò a lanciarsi, dove più ardente era la zuffa, mentre alcuni, mirandolo, ripetevano i suoi versi:

Non fiori, non carmi
Degli avi sull'ossa,
Ma il suono sia d'armi,
Ma i serti sien l'opre,
Ma tutta sia scossa
Da guerra la terra
Che quelle ricopre,
Sia guerra tremenda,
Sia guerra che sconti
La rea servitù,

quando un'altra palla lo ferì al ginocchio. Cadde al suolo e vi restò, finchè il Cosenz e l'Assanti lo raccolsero, quantunque « egli dicesse loro: « Non pensate a me, andate a combattere « per la santa causa. Scriverete ai miei che sono morto ono- « ratamente ». Ma non morì allora e, trasportato a Venezia, nella casa della contessa Soranzo, sopportò l'amputazione della gamba senza emettere un lamento ed intrattenendosi cogli astanti a parlare dell'Italia « con quello stesso affetto che gli eroi di Plutarco avrebbero usato parlando di Atene e di Sparta » (1). Sperava egli di poter di nuovo scendere in campo, ed i suoi amici confidavano che quella nobile esistenza potesse essere conservata all'Italia, ma, alle undici del mattino del tre novembre, *protestando di non odiare alcuno e di sentir soltanto fatica ad amare i nemici d'Italia*, il poeta riposò l'anima nel seno di Dio (2), più fortunato di Giorgio Byron, ch'ebbe

---

(1) Elogio funebre di Alessandro Poerio, recitato in S. Marco dall'abate Rambaldi di Treviso. Venezia, tip. Naratovich, 1849.

(2) Nisco Nicola, *Storia civile del Regno d'Italia*, Vol. I, pag. 393.

il dolore di morire senza aver potuto, come desiderava, prestare il suo braccio alla causa dell'indipendenza greca, e degno di essere paragonato al Körner, che, al pari di lui, alla patria dedicò l'ingegno e l'ispirazione e sacrificò poscia la vita. « Alessandrio Poerio, scrive Nicola Nisco (1), è il tipo più bello, « più sublime, più modesto dell'italiano moderno. In lui la « patria sovrastava ad ogni affetto e comprendeva l'idea di « ogni sacrificio, ed il celare e il non immedesimare con la vita, « con la luce, con Dio questo sentimento era un delitto (2) ». Fu sepolto nella tomba dei Paravia e le donne veneziane posero su quella un'iscrizione, dettata da Luigi Carrer, che a lui non fu certo inferiore per gentilezza d'animo e per isquisita sensibilità (3).

Del resto il 27 ottobre non solamente s'illustrarono soldati ed ufficiali, ma l'intera città tenne un contegno forte e virile. Mentre infatti più ferveva la pugna, il popolo, affollato nella

---

(1) *La difesa di Venezia e di Roma.*

(2) Sul Poerio Cfr. pure l'opera di Mariano d'Ayala: *Poesie edite e postume di A. Poerio con cenni intorno alla sua vita.* Firenze tip. Le Monnier, e R. Barbiera, *I poeti della patria* pag. 171-172. Negli ultimi suoi giorni in un canto a Venezia disse:

O Venezia, mai più l'ultimo canto
Sgorgommi come in te da vivo affetto.
Mai mi sentii la voluttà del pianto
Come al tuo dolce aspetto.
Benchè nato colà dove più ride
Sotto limpido ciel l'onda tirrena
E inghirlandata Napoli s'asside
Città della sirena,
Ebbi di te, che di natura sei
D'arte e gloria e sventura eletta cosa,
Desio supremo, e altrove non potrei
Trovar ricetto e posa.

(3) L'iscrizione suona così:

Qui riposa | accolto nell'amica tomba dei Paravia | Alessandro Bar. Poerio di Napoli | che dati all'Italia | il cuore gli studi lo esilio | per essa milite volontario morì di ferite tocche in Mestre | il XXVII ottobre MDCCCXLVIII di anni XLVI. | Alcune veneziane | sorelle allo estinto | Nell'amore della Patria con pietoso dolore commiserando la madre lontana | Che più non lo aspetta | posero questa memoria.

piazza S. Marco, si mostrava fiero e superbo che da Venezia partisse il segnale all'Italia ch'era urgente rinnovare la lotta contro l'insolente straniero; la guardia civica avrebbe voluto correre in aiuto dei combattenti e le donne ed i vecchi, prostrati nella basilica d'oro, inalzavano preghiere a Dio ([1]), « perchè, dice benissimo il Molmenti ([2]), in quella primavera « sacra della nostra libertà, l'amor della patria, vampeggiante « di purissimo fuoco, s'accompagnava al sentimento della re- « ligione, che fa divina l'anima nelle grandi esultanze e nei « grandi dolori ».

Alcune donne poi, tra le quali ricordiamo soltanto Teresa Papadopoli, Antonietta Benvenuti, Elisabetta Giustinian, Maddalena Comello, Teresa Manin, si consacrarono nei dì seguenti alla cura dei numerosi feriti giacenti negli ospedali e pensarono di erigere tra Marghera e Mestre un monumento, che ai posteri tramandasse perenne memoria degli atti di virtù compiuti in quel luogo da un pugno di prodi. La nobile idea fu accolta con immenso favore, specialmente dai soldati, che diedero tutti il loro obolo affinchè, al più presto, fosse effettuata; ma gli avvenimenti posteriori non lo permisero e la somma raccolta venne invece spesa a protrarre di qualche giorno la resistenza della Gran Mendica, che tanta e fulgidissima gloria irradiò sull'Italia del 1848-'49. Il Pepe, inoltre, scrive il Noaro ([3]), considerando che in un piccolo esercito gli avanzamenti devono essere proporzionati al numero del soldati, propose d'istituire un ordine militare per fregiarne quelli che più si segnalassero. Incaricò perciò il Cavedalis di dettare e di sottoporre all'approvazione dell'Assemblea il progetto di un tale ordine ed offrì al governo duecento napoleoni d'oro per concorrere in parte alla spesa necessaria, ma in memoria della battaglia di Mestre, conclude con amarezza il nostro storico, non venne schiacciata nè pure una testa di chiodo.

([1]) Noaro. op. cit. 121.

([2]) *Religione e patria in Venezia 1848.* Numero unico edito a cura del Comune e del Comitato cittadino nel cinquantesimo anniversario della gloriosa epopea, pag. 11.

([3]) op. cit. 137-138.

Il 29 ottobre fu giorno di festa per i Veneziani, che si affollarono nella piazzetta per mirare le spoglie tolte agli Austriaci. Uomini e fanciulli si disputavano l'onore di trascinare dinanzi al palazzo ducale i cannoni conquistati, mentre le milizie vittoriose sfilavano liete alla presenza dei governanti e del generale supremo. Un bel sole d'autunno contribuì a render più gaio quello spettacolo, il quale, per un momento, diede agli astanti l'illusione che si rinnovassero i giorni felici ed eroici dell'antica repubblica di S. Marco, allorchè le galee veneziane ritornavano dai mari orientali cariche di preda e di ricchezze. Ahimè! quei tempi erano irrevocabilmente passati, ma i Veneziani, che il 29 ottobre riempirono la piazzetta, potevano confortarsi col pensiero che, nei loro animi, non erano spenti nè il coraggio nè i magnanimi propositi dei padri, e che, se questi avevano combattuto per accrescere la potenza della patria, eglino invece pugnavano e sottostavano a gravissimi sacrifici per darle libertà ed indipendenza (1). Alcuni stimarono improvvida, o, per lo meno, inutile, la sortita di Mestre, poichè i nostri sgombrarono tosto il territorio occupato; ma noi diremo che, sebbene non debba riguardarsi quale vittoria vera quella che non finisce collo scacciare definitivamente il nemico dai luoghi da esso sino allora tenuti, vi sono casi che

---

(1) Il 31 ottobre, nella chiesa dei Ss. Giovanni e Paolo, si resero solenni onori funebri ai caduti nella battaglia, ai quali, in un elegante discorso, inneggiò l'abate Da Camin. Sopra la porta principale del tempio si leggeva la seguente iscrizione:

Fratelli! fratelli!
preghiamo la requie e la luce perpetua
alle anime di quei prodi
che col sangue sparso alle barricate di Mestre
lavarono in parte
la macchia, ahi non sua! dell' esercito italiano
e
segnalarono all' Italia
per ambagi diplomatiche moribonda
che solo col sangue risorgerà
a vita di libertà vera e duratura.

(Cicogna, Diario cit.)

rendono proficua e giustificata un espulsione temporanea. Questa considerazione vale appunto per quel glorioso fatto d'armi, il quale, come notammo, scosse le milizie veneziane, da troppo lungo tempo giacenti nell'ozio, incoraggiò i cittadini e contribuì a rialzare la fama del valore italiano. Altri invece hanno affermato che i vantaggi ottenuti avrebbero potuto essere maggiori, se il Pepe avesse operato con maggiore abilità ed audacia, ed Alessandro Masson (1) afferma anche che sarebbe stato molto opportuno tentare nuove imprese, le quali avrebbero contribuito ad eccitare sempre più l'ardore e ad accrescere la fiducia delle milizie veneziane. Invero noi ci dichiariamo incompetenti a risolvere la prima questione ed in quanto all'affermazione dello storico svizzero, fa d'uopo tener presente che tanto la Francia quanto l'Inghilterra non mancarono di presentare, per mezzo dei loro consoli, rimostranze al governo veneziano, perchè avesse violato la tregua, che gli Austriaci non avevano mai osservato (2); anzi il Carrano scrive che il generale supremo meditava altre imprese più ardite (3), ma ne fu sconsigliato dai Triumviri, intenti sempre a dimostrare il loro buon volere agli stati, i quali essi confidavano che propugnassero costantemente la causa di Venezia. « Inoltre, nota il Cavedalis, la « vittoria riportata non era tale da illudermi, bensì confermò « la mia convinzione che, sia per lo scarso numero sia per la « qualità dei nostri giovani guerrieri intolleranti dell'ordine e « della disciplina e per lo stato delle nostre difese, se il ne- « mico facesse uno sforzo vigoroso, tutto sarebbe perduto » (4) Fortunatamente il ritorno della squadra sarda, avvenuto nello stesso giorno 27 ottobre nelle acque veneziane (5), bastò a li-

---

(1) *Venise en 1848 et 1849*, pag. 124.

(2) Leggi la lettera, inviata da lord Palmerston al console Dawkins in Planat de la Faye, op. cit. Vol. II, pag. 116.

(3) op. cit. 79. Cfr. pure Carlo Pisacane (*Guerra combattuta in Italia negli anni 1848-49*, pag. 154), Roma, Società editrice Alighieri 1906), il quale afferma che la giornata di Mestre ebbe un'eco in tutta Italia.

(4) op. cit. libro IV, 413.

(5) « S. M. scrisse il Perrone, ministro degli esteri, ai Triumviri, rimandò « l'armata a Venezia per costringere il nemico ad eseguire i patti contenuti nel-

berare Venezia dal blocco marittimo ([1]) e contemporaneamente si sparse di nuovo e con maggiore insistenza la voce che la terraferma si preparasse a ribellarsi ([2]).

Così nuove speranze di un avvenire migliore allietarono l'animo dei più, ma il Cicogna giustamente osservò che l'Austria, differendo, prolungando e tergiversando avrebbe raggiunto il suo scopo, vale a dire avrebbe di nuovo ricuperato il suo dominio su Venezia. In fatti essa dichiarò, è vero, in questi giorni che il congresso per la pace si sarebbe raccolto a Bruxelles, ma, in realtà, non mirava che ad acquistar tempo ed a stancare la Francia e l'Inghilterra, la prima delle quali era involta in gravissime difficoltà interne e la seconda non aveva che un desiderio, ristabilire a qualunque costo la pace, europea, che le dava modo di attendere sicuramente ai traffici e alle industrie, fondamento principale della sua potenza e della sua prosperità.

V. Marchesi

«l'articolo IV dell'armistizio Salasco e provvedere alla sicurezza della città, a «costo anche di fare il sacrificio della metà del nostro parco di assedio di Pe-«schiera, la cui restituzione ci fu offerta dal Radetzky, a patto che la squadra «ritorni nei regi stati». (Doc. Manin N. 880). Una parte di detto parco venne restituita (Raccolta ecc. IV 370), ma alcuni cannoni piemontesi furono nel 1849 usati dagli Austriaci contro Venezia. Caduta questa, scrive il de Giorgi, io li vidi a Marghera. (op. cit. pag. 30)

([1]) «Il 16 ottobre, il manzo costava novanta centesimi la libbra; il 4 no-«vembre cinquanta centesimi» (Diario Cicogna).

([2]) Nel settembre gli Austriaci avevano invitato gli abitanti della terraferma a sottoscrivere una dichiarazione attestante che di buon animo erano ritornati sotto la dominazione imperiale, ed il governo veneziano, dal canto suo, s'era adoperato perchè i Veneti rifugiatisi a Venezia dettassero una protesta (Cicogna, Diario citato; Raccolta ecc. IV 94-95).

Umidità assoluta. Tabella III

Mesi	Tensione del vapore in mm.						
	Media mensile	Media giornaliera		estremi			
		massima	minima	massimo	giorni	minimo	giorni
Gennaio	**3.54**	5.19	1·78	5.67	8	1.47	23
Febbraio	3.92	7.89	1.77	8.39	28	**0.88**	8
Marzo	5.04	7.46	1.69	8.04	12	1.06	30
Aprile	5.96	8.66	3.15	9.78	18	1.36	3
Maggio	9.24	14.27	6.27	16.37	29	4.16	27
Giugno	10.81	15.42	4.62	17.20	28	3.31	21
Luglio	**13.27**	16.55	8.42	17.23	11	7.63	2
Agosto	12.38	**17.44**	7.03	**17.91**	25	6.25	29
Settembre	9.09	14.42	5.22	17.66	7	4.30	12
Ottobre	8.82	12.67	4.59	12.93	7	4.17	28
Novembre	7.04	11.84	4.14	12.16	11	3.64	28
Dicembre	3.87	6.58	**1.67**	7.39	1	1.66	31
Media annuale	**7.75**						

Umidità relativa. Tabella IV.

Mesi	Rapporto tra l'umidità assoluta e la tensione massima $\times$ 100						
	Media mensile	Media giornaliera		estremi			
		massima	minima	massimo	giorni	minimo	giorni
Gennaio	63.7	89.0	44.3	95	8.19	21	31
Febbraio	59.4	93 0	27.0	97	28	**10**	8
Marzo	65.0	90.3	**23.8**	97	12	13	10
Aprile	**55.9**	81.7	25.7	89	19	21	11
Maggio	62.0	87.7	38.0	90	17	24	27
Giugno	58.0	81 5	28.7	93	19	17	6